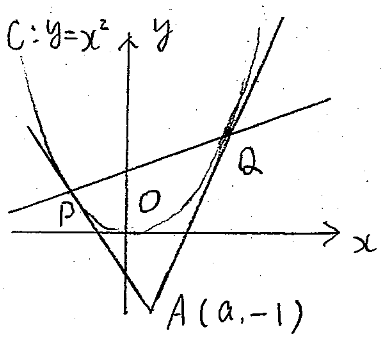
1



(1)　Cの接線の接点を(t, t^2)

とおくと，$y=x^2$において，

$y'=2x$より接線の方程式は，

$y-t^2=2t(x-t)$.

$y=2tx-t^2$.

これが$A(a,-1)$を通ることより，

$-1=2ta-t^2$.

$t^2-2at-1=0$. ---①

①の判別式をDとすると，

$\frac{D}{4}=a^2+1>0$ であるから，

①は異なる2つの実数解をもつ.

よって，Aを通るCの接線は

2本存在することが示された.

（証明終り）

(2)　①の異なる2つの実数解を

α，βとすると，

$P(\alpha, \alpha^2)$，$Q(\beta, \beta^2)$

としてよいので，直線PQの

方程式は，

$y-\alpha^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$,

$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$.

①において解と係数の関係より，$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=-1$

であるから，直線PQの方程式は，

$y=2ax+1$

となり，示された．（証明終り）

(3)　$A(a,-1)$と

直線$2ax-y+1=0$の距離Lは，

$L=\frac{|2a^2+2|}{\sqrt{4a^2+1}}=\frac{2a^2+2}{\sqrt{4a^2+1}}$.

$\sqrt{4a^2+1}=u$とおくと，$u\geqq 1$

であり，$a^2=\frac{1}{4}(u^2-1)$.

$L=\frac{\frac{1}{2}(u^2-1)+2}{u}=\frac{u^2+3}{2u}$

$=\frac{1}{2}\left(u+\frac{3}{u}\right)$.

$u\geqq 1$より相加平均と相乗平均の

大小関係を用いて，

$u+\frac{3}{u}\geqq 2\sqrt{u\cdot\frac{3}{u}}=2\sqrt{3}$.

$u=\frac{3}{u}$，$u\geqq 1$ より $u=\sqrt{3}$

のとき等号成立．

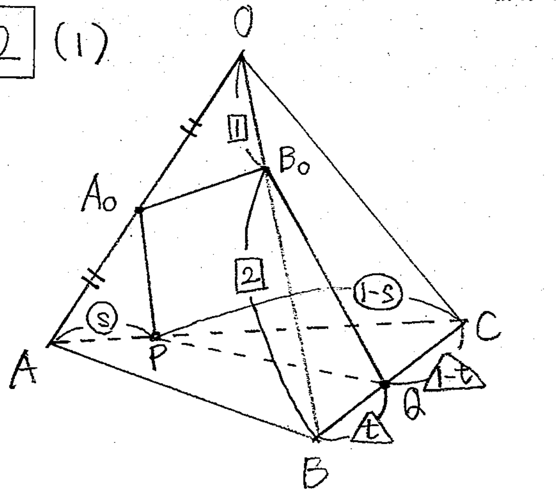
このとき $a^2=\frac{1}{2}$ より $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

以上より，Lの最小値は，$\sqrt{3}$，---(答)

そのときのaの値は，$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

---(答)

2 (1)



点Qは平面PA_0B_0上にあるから、ある実数k, lを用いて

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{OA_0} + (1-k-l)\overrightarrow{OB_0}$$
$$= k\{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\} + l\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + (1-k-l)\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$= \left\{k(1-s)+\frac{l}{2}\right\}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(1-k-l)\overrightarrow{OB} + ks\overrightarrow{OC} \quad —①$$

と表せる。

また、Qは線分BCを$t:(1-t)$に内分するから

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}. \quad —②$$

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$は1次独立だから、①②より

$$\begin{cases} k(1-s)+\dfrac{l}{2}=0. & —③ \\ \dfrac{1}{3}(1-k-l)=1-t. & —④ \\ ks=t. & —⑤ \end{cases}$$

③より $l=2k(s-1)$. —③'

④+⑤より

$$\frac{1}{3}(1-k-l)+ks=1.$$
$$1-k-l+3ks=3.$$
$$-k-l+3ks=2.$$

これに③'を代入して

$$-k-2k(s-1)+3ks=2.$$
$$k(s+1)=2.$$

$0<s<1$より $s \neq -1$ なので

$$k=\frac{2}{s+1}.$$

これを⑤へ代入して

$$t=\frac{2s}{s+1}. \quad \cdots(答)$$

(2) $\angle POQ=90°$より $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ なので

$$\{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\}\cdot\{(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\}=0.$$
$$(1-s)(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(1-s)t\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+s(1-t)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+st|\overrightarrow{OC}|^2=0.$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot2\cdot\cos120°=-1,$$
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,$$
$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2\cdot1\cdot\cos60°=1,$$
$$|\overrightarrow{OC}|^2=2^2=4$$

より

$$-(1-s)(1-t)+(1-s)t+4st=0.$$
$$2t(s+1)+s-1=0.$$

よって(1)より

$$2\cdot\frac{2s}{s+1}\cdot(s+1)+s-1=0.$$
$$s=\frac{1}{5}. \quad \cdots(答)$$

（これは$0<s<1$を満たす。
また、このとき$t=\frac{1}{3}$より$0<t<1$を満たす。）

$\boxed{3}$

(1) (*)より

$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_a^c=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_b^c.$$

$$\frac{1}{3}(c^3-a^3)+\frac{b}{2}(c^2-a^2)$$
$$=\frac{1}{3}(c^3-b^3)+\frac{a}{2}(c^2-b^2).$$

$$\frac{b-a}{2}c^2=\frac{a^3-b^3}{3}+\frac{ab(a-b)}{2}.$$

$a \neq b$より，両辺を$\frac{b-a}{2}$ $(\neq 0)$でわると，

$$c^2=-\frac{2}{3}(a^2+ab+b^2)-ab$$
$$=-\frac{1}{3}(2a+b)(a+2b). \quad \cdots(答)$$

(2) $a<b$より$a \neq b$であるから，(1)の結果を用いることができる．$c=3$より，

$$-27=(2a+b)(a+2b).$$

$2a+b$と$a+2b$はいずれも整数で，

$$(a+2b)-(2a+b)$$
$$=b-a$$
$$>0 \ (a<bより),$$

$$(a+2b)+(2a+b)$$
$$=3(a+b)$$
$$=(3の倍数) \quad —— ①$$

に注意すると，

$$(2a+b,\ a+2b)=(-9,\ 3),\ (-3,\ 9).$$

よって，

$$(a,\ b)=(-7,\ 5),\ (-5,\ 7).$$
$$\cdots(答)$$

(3) (1)より，

$$-3c^2=(2a+b)(a+2b) \quad —— ②$$

左辺は3の倍数であるから，右辺も3の倍数．3は素数であるから，$2a+b$と$a+2b$の少なくとも一方は3の倍数．①より，他方も3の倍数．よって②の右辺は9の倍数であり，

$$-3c^2=9n \ (nは整数)$$

と表せる．

$$c^2=-3n$$

よりc^2は3の倍数で，3は素数であるから，cも3の倍数である．

(証明終り)