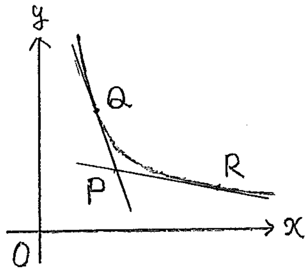
1

(1)



$y=\frac{1}{x}$ のとき $y'=-\frac{1}{x^2}$ であるから，

$x=u$ における $y=\frac{1}{x}$ の接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{u^2}(x-u)+\frac{1}{u}.$$

これが点 $P(a, b)$ を通る条件は

$$b=-\frac{1}{u^2}(a-u)+\frac{1}{u}$$

$$bu^2-2u+a=0 \quad \cdots ①$$

u の方程式①の2解が s, t にほかならない．

$b>0$ に注意して①を解くと

$$u=\frac{1\pm\sqrt{1-ab}}{b}.$$

$ab<1$，$0<s<t$ であるから，

$$s=\frac{1-\sqrt{1-ab}}{b},\quad t=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{b}. \quad \cdots (答)$$

(2) (1)より，

$$\frac{t}{s}=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}}=\frac{2}{1-\sqrt{1-ab}}-1$$

点 $P(a, b)$ は

曲線 $y=\frac{9}{4}-3x^2$ $(x>0, y>0)$

上にあるから，

$$b=\frac{9}{4}-3a^2 \quad \cdots ②$$

したがって，

$$ab=\frac{9}{4}a-3a^3$$

右辺を $f(a)$ とすると

$$f(a)=\frac{9}{4}a-3a^3,$$

$$f'(a)=\frac{9}{4}-9a^2$$

$$=-9\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right).$$

ここで，$a>0$，$b>0$ であるから，②より，

$$a>0 \text{ かつ } \frac{9}{4}-3a^2>0.$$

$$0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

したがって，$f(a)$ の増減は次表のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	(0)	↗	$\frac{3}{4}$	↘	(0)

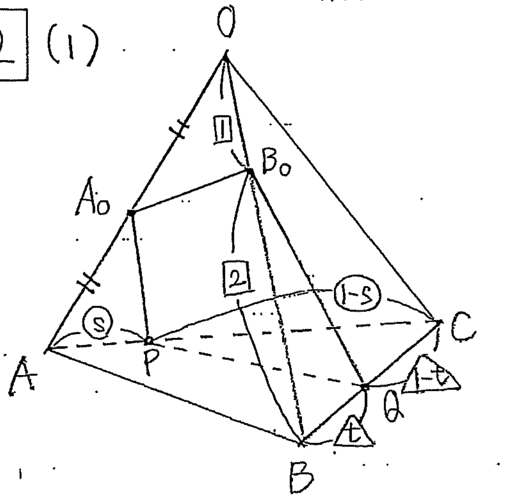
$\frac{t}{s}$ が最小になるのは ab が最大になるときであり，このとき $ab=\frac{3}{4}$ (<1) であるから，$\frac{t}{s}$ の最小値は

$$\frac{2}{1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}}-1=3. \quad \cdots (答)$$

また，②より，求める a, b の値は

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{3}{2}. \quad \cdots (答)$$

$\boxed{2}$ (1)



点Qは平面PA_0B_0上にあるから，ある実数k, lを用いて

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}+l\overrightarrow{OA_0}+(1-k-l)\overrightarrow{OB_0}$$
$$=k\{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\}+l\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+(1-k-l)\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$=\left\{k(1-s)+\frac{l}{2}\right\}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(1-k-l)\overrightarrow{OB}+ks\overrightarrow{OC} \quad -①$$

と表せる．

また，Qは線分BCを$t:(1-t)$に内分するから

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}. \quad -②$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$は1次独立だから，①②より

$$\begin{cases} k(1-s)+\dfrac{l}{2}=0. & -③ \\ \dfrac{1}{3}(1-k-l)=1-t. & -④ \\ ks=t. & -⑤ \end{cases}$$

③より $l=2k(s-1)$. $\quad -③'$

④+⑤より

$$\frac{1}{3}(1-k-l)+ks=1.$$
$$1-k-l+3ks=3.$$
$$-k-l+3ks=2.$$

これに③'を代入して

$$-k-2k(s-1)+3ks=2.$$
$$k(s+1)=2.$$

$0<s<1$より$s\neq-1$なので

$$k=\frac{2}{s+1}.$$

これを⑤へ代入して

$$t=\frac{2s}{s+1}. \quad \cdots(答)$$

(2) $\angle POQ=90°$より $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$なので

$$\{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\}\cdot\{(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\}=0.$$
$$(1-s)(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(1-s)t\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+s(1-t)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+st|\overrightarrow{OC}|^2=0.$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot2\cdot\cos120°=-1,$$
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,$$
$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2\cdot1\cdot\cos60°=1,$$
$$|\overrightarrow{OC}|^2=2^2=4$$

より

$$-(1-s)(1-t)+(1-s)t+4st=0.$$
$$2t(s+1)+s-1=0.$$

よって(1)より

$$2\cdot\frac{2s}{s+1}\cdot(s+1)+s-1=0.$$
$$s=\frac{1}{5}. \quad \cdots(答)$$

（これは$0<s<1$を満たす．
また，このとき$t=\frac{1}{3}$より$0<t<1$を満たす．）

3

(1) $f(x)=\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)$,

$g(x)=f(x)+\frac{(x-t)^2}{2}$

とおく.

$x>t\ (\geqq 1)$ のとき

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=\frac{t-x}{xt}<0$.

$f(x)$ は $x\geqq t$ で減少関数.

$f(t)=0$ より

$x\geqq t$ のとき $f(x)\leqq 0$.

$x>t\ (\geqq 1)$ のとき

$g'(x)=f'(x)+x-t$

$=\frac{xt-1}{xt}(x-t)>0$.

$g(x)$ は $x\geqq t$ で増加関数

$g(t)=0$ より

$x\geqq t$ のとき $g(x)\geqq 0$.

以上より, $x\geqq t$ のとき

$$-\frac{(x-t)^2}{2}\leqq \log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq 0 \quad \cdots ①$$

(証明終り)

(2) ① を $t\leqq x\leqq t+\frac{1}{n}$ で積分して

$$-\int_t^{t+\frac{1}{n}}\frac{(x-t)^2}{2}dx$$

$$\leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log t\,dx$$

$$-\int_t^{t+\frac{1}{n}}\frac{1}{t}(x-t)\,dx\leqq 0.$$

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}}\frac{(x-t)^2}{2}dx=\left[\frac{1}{6}(x-t)^3\right]_t^{t+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{6n^3},$$

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}}\frac{1}{t}(x-t)\,dx=\left[\frac{1}{2t}(x-t)^2\right]_t^{t+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2tn^2}$$

より

$$-\frac{1}{6n^3}\leqq\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2tn^2}\leqq 0. \quad \cdots ②$$

(証明終り)

(3) ② で $t=1+\frac{k}{n}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

とおくと,

$$I_k=\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

として,

$$\therefore -\frac{1}{6n^3}\leqq I_k-\frac{1}{2n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\leqq 0.$$

$k=0,1,2,\cdots,n-1$ について和をとって

$$-\frac{1}{6n^2}\leqq\sum_{k=0}^{n-1}I_k-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\leqq 0.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}I_k=\int_1^2\log x\,dx-\frac{a_n}{n}$$

より, $b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ とおくと

$$\frac{b_n}{2n}-\frac{1}{6n^2}\leqq\int_1^2\log x\,dx-\frac{a_n}{n}\leqq\frac{b_n}{2n}. \quad \cdots ③$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\left[\log(1+x)\right]_0^1=\log 2$$

$\cdots ④$

3

よって $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2n}=0$ だから，③で

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^2 \log x\,dx-\frac{a_n}{n}\right)=0.$$

$\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-p\right)=0$$

より

$$p=\int_1^2 \log x\,dx$$

$$=\left[x\log x-x\right]_1^2$$

$$=2\log 2-1.$$

また，このとき ③ より

$$\frac{b_n}{2}-\frac{1}{6n}\leqq pn-a_n\leqq\frac{b_n}{2}.$$

④ と はさみうちの原理 により

$$\lim_{n\to\infty}(pn-a_n)=\frac{\log 2}{2}.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=-\frac{\log 2}{2}.$$

以上より

$p=2\log 2-1,\quad q=-\frac{\log 2}{2}.$ …(答)

4

(※)を変形すると

$$\frac{1}{3}(c^3-a^3)+\frac{b}{2}(c^2-a^2)=\frac{1}{3}(c^3-b^3)+\frac{a}{2}(c^2-b^2).$$

$$\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{c^2}{2}(b-a)+\frac{ab}{2}(b-a)=0. \cdots ①$$

(1)　$a \neq b$ より ①をさらに変形すると

$$\frac{1}{3}(b^2+ba+a^2)+\frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2}=0.$$

$$3c^2=-(2a^2+5ab+2b^2).$$

$$3c^2=-(2a+b)(a+2b). \cdots\cdots ②$$

これより $(2a+b)(a+2b)$ は3の倍数であり，3が素数であることから $2a+b$，$a+2b$ のうち少なくとも一方は3の倍数である．

さらに $(2a+b)+(a+2b)=3(a+b)$ より，$(2a+b)+(a+2b)$ が3の倍数であることから，$2a+b$，$a+2b$ のうち一方のみが3の倍数になることはなく，

$2a+b$，$a+2b$ は共に3の倍数となるから，$(2a+b)(a+2b)$ は 3^2 の倍数である．

これと ② より c^2 は3の倍数となるから，整数 c は3の倍数である．

(証明終り)

(2)　$a<b$ より $a \neq b$ だから (1)と同様に①を変形して ②を得る．

さらに $c=3600=2^4\cdot 3^2\cdot 5^2$ より

$$(2a+b)(a+2b)=-2^8\cdot 3^5\cdot 5^4.$$

また，(1)で述べた理由により，

$2a+b$，$a+2b$ は共に3の倍数

であるから

$$\begin{pmatrix} 2a+b \\ a+2b \end{pmatrix}=\pm 3\begin{pmatrix} 2^i\cdot 3^j\cdot 5^k \\ -2^{8-i}\cdot 3^{3-j}\cdot 5^{4-k} \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} 2^{i+1}\cdot 3^j\cdot 5^k+2^{8-i}\cdot 3^{3-j}\cdot 5^{4-k} \\ -2^{9-i}\cdot 3^{3-j}\cdot 5^{4-k}-2^i\cdot 3^j\cdot 5^k \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{ただし，} & i\in\{0,1,2,\cdots,8\}, \\ & j\in\{0,1,2,3\}, \\ & k\in\{0,1,2,3,4\} \end{array}\right)$$

と表される．

このうち $a<b$ をみたすものは

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(2^{i+1}\cdot 3^j\cdot 5^k+2^{8-i}\cdot 3^{3-j}\cdot 5^{4-k}) \\ 2^{9-i}\cdot 3^{3-j}\cdot 5^{4-k}+2^i\cdot 3^j\cdot 5^k \end{pmatrix}$$

と表されるものだけである．

これより (a, b) と (i, j, k) は1対1に対応しているから，求める個数は

$$9\times 4\times 5=180. \cdots(答)$$

5

(1) $f(x)=x-\tan x \quad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$

とおく．

$$f'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=-\tan^2 x$$

$$\leqq 0 \quad \left(\text{等号は } x=0 \text{ のときのみ成立}\right)$$

より，$f(x)$ は $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において単調減少．

また，$\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} f(x)=+\infty$，

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x)=-\infty$$

であることから，どんな実数 a に対しても $f(x)=a$ を満たす x $\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$ がちょうど1個存在する．　（証明終り）

(2) $(\sin x)'=\cos x$ より，

$C: y=\sin x$ の $(u, \sin u)$ における接線を l_u とすると，l_u の式は

$$y=(\cos u)(x-u)+\sin u$$

$$=(\cos u)x+(\sin u-u\cos u).$$

$|t|<\frac{\pi}{2}$ …① を満たす t に対して，l_t と l_u が一致するような u が $u\geqq\frac{\pi}{2}$ …② に存在する t は $x_1, x_2, x_3, \dots$ のいずれかであることを示せばよい．

l_t と l_u が一致する条件は，

$$\begin{cases} \cos t=\cos u & \cdots ③ \\ \sin t-t\cos t=\sin u-u\cos u. & \cdots ④ \end{cases}$$

①，③より，$\cos u>0$ であり，このとき④の両辺を $\cos t\ (=\cos u)$ で割って，

$$\tan t-t=\tan u-u. \quad \cdots ④'$$

ここで，①，②，③より，

$u-t=2m\pi$ (mは自然数)，…⑤

または

$u+t=2l\pi$ (lは自然数) …⑥

であり，いずれの場合でも t が①を満たせば u は②を満たす．

⑤のとき，④'は

$\tan t-t=\tan t-t-2m\pi$

となるが，これは不成立．

⑥のとき，④'は

$\tan t-t=-\tan t+t-2l\pi$.

$$t-\tan t=l\pi. \quad \cdots ⑦$$

$\begin{cases} ③ \\ ④ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ⑥ \\ ⑦ \end{cases}$ であり，⑦を満たす t は $x_1, x_2, x_3, \dots$ のいずれかであるから証明は完了した．（証明終り）