Ⅰ

(1) 袋 α から 3 枚の札を順に取り出して並べる方法は ${}_9\mathrm{P}_3$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

また，袋 β から 3 枚の札を順に取り出して並べる方法は ${}_{18}\mathrm{P}_3$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

事象 A「m が奇数」

は

「m の一の位に対応する札の番号が奇数」

となる事象である (他の位に対応する札は何でもよい) .

よって，

$$P(A)=\frac{5\cdot{}_8\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_3}\overset{ア}{=}\boxed{\frac{5}{9}}.$$

また，札の番号を 3 で割った余りで分類すると，

$\{1,\ 4,\ 7\}$，　$\{2,\ 5,\ 8\}$，　$\{3,\ 6,\ 9\}$

の 3 つのグループに分けられる．

事象 B「m が 3 の倍数」

は，取り出した札の番号について

(ア)「3 枚とも同一グループ」または

(イ)「各グループ 1 枚ずつ」

となる事象である．

よって，取り出す順序も考えて

$$P(B)=\frac{3\cdot3!+9\cdot6\cdot3}{{}_9\mathrm{P}_3}\overset{イ}{=}\boxed{\frac{5}{14}}.$$

さらに，$A\cap B$ については，m の一の位が 1 , 3 , 5 , 7 , 9 のいずれであっても，十の位，百の位 (に対応する札) の選び方が，

(ア) の場合 2! 通り，(イ) の場合 $6\cdot3$ 通り

ある．

よって，

$$P(A\cap B)=\frac{5\cdot(2!+6\cdot3)}{{}_9\mathrm{P}_3}=\frac{25}{126}$$

であるから，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{25}{126}}{\frac{5}{9}}\overset{ウ}{=}\boxed{\frac{5}{14}}.$$

次に，

事象 C「$n>550$」

は，n の

「百の位が 6 以上」または

「百の位が 5 かつ十の位が 6 以上」または

「百の位と十の位がともに 5」

となる事象であるから，

$$P(C)=\frac{8\cdot{}_{17}\mathrm{P}_2+2\cdot8\cdot16+2\cdot1\cdot16}{{}_{18}\mathrm{P}_3}\overset{エ}{=}\boxed{\frac{77}{153}}.$$

最後に，

事象 D「$m>n$」

について考える．

$m>n$ となるとき，m , n に対応する 3 枚ずつの札について，

「その札の番号が k ならば $10-k$ 番の札に交換」

という操作を行うと $m<n$ となり，逆に $m<n$ のときも同様の操作を施すと $m>n$ となる．

よって，$m>n$ となる確率と $m<n$ となる確率は等しいから，$m=n$ である事象を E とすると，

$2P(D)+P(E)=1$ (全事象の確率) .　$\cdots(*)$

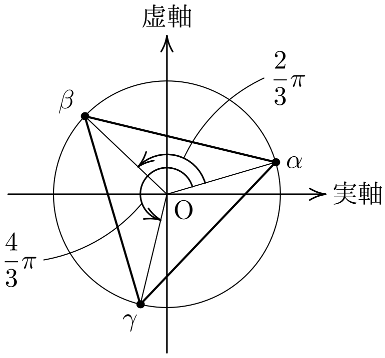
ここで，$m=n$ となる取り出し方は，m に対応する 3 枚の取り出し方それぞれに対して，n に対応する 3 枚の取り出し方が 2^3 通りずつあるから，

$$P(E)=\frac{{}_9\mathrm{P}_3}{{}_9\mathrm{P}_3}\cdot\frac{2^3}{{}_{18}\mathrm{P}_3}=\frac{1}{612}.$$

よって，$(*)$ より

$$P(D)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{612}\right)\overset{オ}{=}\boxed{\frac{611}{1224}}.$$

(2)　正三角形の頂点が，α , β , γ の順に反時計回りと考えても一般性を失わない．



このとき，点 α を原点のまわりに $\dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{4}{3}\pi$ 回転した位置に点 β , γ がある．

よって，

$$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$

とおくと，ド・モアブルの定理より

$$\omega^2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

となり，

$$\beta=\alpha\omega\ ,\quad \gamma=\alpha\omega^2$$

と表せる．

ここで，ド・モアブルの定理より

$$\omega^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\ .$$

また，$\omega\neq 1$ より

$$1+\omega+\omega^2=\frac{1-\omega^3}{1-\omega}=0$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=\alpha(1+\omega+\omega^2)\\&=0\ ,\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha&=\alpha^2(\omega+\omega^3+\omega^2)\\&=\alpha^2(1+\omega+\omega^2)\\&=0\ .\end{aligned}$$

よって，

$$|\alpha+\beta+\gamma|\overset{カ}{=}\boxed{0}\ ,\ |\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha|\overset{キ}{=}\boxed{0}\ .$$

また，

$$\alpha\beta\gamma=\alpha^3\omega^3=\alpha^3$$

および

$$|\,\alpha\,|=\sqrt{(\sqrt{23}\,)^2+(\sqrt{2}\,)^2}=5$$

より，

$$|\alpha\beta\gamma|=|\,\alpha\,|^3\overset{ク}{=}\boxed{125}\ .$$

さらに，$z=-1+i$ とおくと，

$$\alpha'=\alpha+z\ ,\quad \beta'=\beta+z\ ,\quad \gamma'=\gamma+z$$

であるから，

$$\alpha'+\beta'+\gamma'=\alpha+\beta+\gamma+3z=3z\ .$$

また，

$$\begin{aligned}&\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'\\&=(\alpha+z)(\beta+z)+(\beta+z)(\gamma+z)\\&\qquad\qquad+(\gamma+z)(\alpha+z)\\&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2z(\alpha+\beta+\gamma)+3z^2\\&=3z^2\ .\end{aligned}$$

$$|\,z\,|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

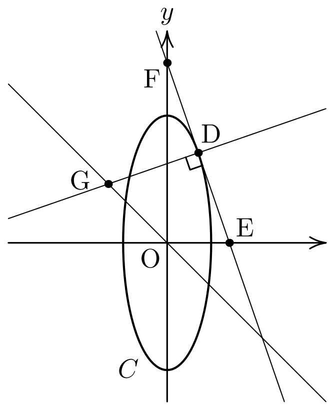
であることにも注意すると，

$$|\alpha'+\beta'+\gamma'|=3|\,z\,|\overset{ケ}{=}\boxed{3\sqrt{2}}\ ,$$

$$|\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'|=3|\,z\,|^2\overset{コ}{=}\boxed{6}\ .$$

II

楕円 $C : \dfrac{k^2}{2}x^2 + \dfrac{1}{2k^2}y^2 = 1$



(1) 点 $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{k},\ k\right)$ における C の接線の方程式は，

$$\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1}{k}x + \frac{1}{2k^2}\cdot ky = 1\ ,$$

すなわち，

$$k^2x + y = 2k\ . \qquad \cdots①$$

① に $y = 0$ を代入すると $x = \dfrac{2}{k}$.

① に $x = 0$ を代入すると $y = 2k$.

よって，

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\frac{2}{k},\ 0}\right),\quad \mathrm{F}(\boldsymbol{0,\ 2k})\ . \qquad \cdots(答)$$

(2) D における C の法線は，D を通り ① に垂直な直線であるから，その方程式は

$$1\left(x - \frac{1}{k}\right) - k^2(y - k) = 0\ ,$$

すなわち，

$$x - k^2y = \frac{1 - k^4}{k}\ . \qquad \cdots②$$

② と $y = -x$ を連立させると，

$$(1 + k^2)x = \frac{1 - k^4}{k}$$

より，

$$x = \frac{1 - k^4}{k(1 + k^2)} = -\frac{k^2 - 1}{k}\ ,$$

$$y = -x = \frac{k^2 - 1}{k}\ .$$

よって，

$$\mathrm{G}\left(\boldsymbol{-\frac{k^2 - 1}{k},\ \frac{k^2 - 1}{k}}\right)\ . \qquad \cdots(答)$$

また，このことから

$$\overrightarrow{\mathrm{GE}} = \left(\frac{2}{k} + \frac{k^2 - 1}{k},\ 0 - \frac{k^2 - 1}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{k^2 + 1}{k},\ -\frac{k^2 - 1}{k}\right), \qquad \cdots③$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}} = \left(0 + \frac{k^2 - 1}{k},\ 2k - \frac{k^2 - 1}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{k^2 - 1}{k},\ \frac{k^2 + 1}{k}\right)\ . \qquad \cdots④$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{GE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GF}} = \frac{(k^2 + 1)(k^2 - 1)}{k^2} - \frac{(k^2 - 1)(k^2 + 1)}{k^2}$$

$$= 0$$

より $\overrightarrow{\mathrm{GE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{GF}}$ となるから，

$$\angle\mathrm{EGF} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\ . \qquad \cdots(答)$$

(3) ③，④ より，

$$\mathrm{GE}^2 = \mathrm{GF}^2 = \frac{(k^2 + 1)^2 + (k^2 - 1)^2}{k^2} = \frac{2(k^4 + 1)}{k^2}$$

であるから，(2) の結果もあわせて，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{GE}\cdot\mathrm{GF} = \frac{1}{2}\mathrm{GE}^2 = \frac{k^4 + 1}{k^2}\ .$$

一方，(1) の結果より

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{k}\cdot 2k = 2\ .$$

したがって，$S = \sqrt{2}T$ のとき，

$$\frac{k^4 + 1}{k^2} = 2\sqrt{2}\ .$$

$$k^4 - 2\sqrt{2}k^2 + 1 = 0\ .$$

$k^2 > 1$ であることも考慮すると，

$$k^2 = \boldsymbol{\sqrt{2} + 1}\ . \qquad \cdots(答)$$

また，このとき $\theta = \angle\mathrm{OEF}$ とおくと，

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OE}} = k^2 = \sqrt{2} + 1$$

であるから，倍角公式より

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{1 - (\sqrt{2} + 1)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 2}{-(2 + 2\sqrt{2})}$$

$$= -1\ .$$

$0 < 2\theta < \pi$ であるから，

$$2\theta = \frac{3}{4}\pi\ ,\quad \angle\mathrm{OEF} = \theta = \boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}\ . \qquad \cdots(答)$$

III

$$(n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n=2(n+1) \qquad \cdots ①$$

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k = a_n\sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \cdots ②$$

$a_1=1$ より，② は $n=1$ においても成り立つ．

(1) ① で $n=1$ として

$$(1+3)a_2-(1+1)a_1=2\times 2\ .$$

これに $a_1=1$ を代入して

$$a_2=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\ . \qquad \cdots(答)$$

② で $n=2$ として

$$b_1+2b_2=a_2(b_1+b_2)\ .$$

これに $a_2=\dfrac{3}{2}$, $b_1=1$ を代入して

$$b_2=\boldsymbol{1}\ . \qquad \cdots(答)$$

(2) ① の両辺に $n+2$ を掛けて

$$(n+3)(n+2)a_{n+1}-(n+2)(n+1)a_n=2(n+1)(n+2)$$

となる．$c_n=(n+2)(n+1)a_n$ であるから

$$c_{n+1}-c_n=\boldsymbol{2(n+1)(n+2)}\ . \qquad \cdots(答)$$

(3) $c_1=3\times 2\times 1=6$ となるので，$n\geqq 2$ に対して階差数列の公式を使うと

$$\begin{aligned} c_n &= c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)\\ &= 6+\sum_{k=1}^{n-1}2(k+1)(k+2)\\ &= 6+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3}\{(k+1)(k+2)(k+3)\\ &\qquad\qquad -k(k+1)(k+2)\}\\ &= \frac{2}{3}n(n+1)(n+2)+2 \end{aligned}$$

となる ($n=1$ のときも成立).

よって，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}n+\frac{2}{(n+1)(n+2)}}\ . \qquad \cdots(答) \end{aligned}$$

(4) ② より，$n\geqq 2$ のとき

$$nb_n=a_n\sum_{k=1}^{n}b_k-a_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}b_k\ .$$

一方で, 問題文より

$$a_n\sum_{k=1}^{n}b_k-a_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}b_k=a_nb_n+(a_n-a_{n-1})s_{n-1}$$

であるから

$$nb_n=a_nb_n+(a_n-a_{n-1})s_{n-1}\ ,$$

すなわち，

$$(n-a_n)b_n=(a_n-a_{n-1})s_{n-1} \quad (\ n\geqq 2\ )\ . \cdots(*)$$

ここで，各項を計算すると

$$n-a_n=\frac{1}{3}n-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\ ,$$

$$\begin{aligned} a_n-a_{n-1} &= \frac{2}{3}\{n-(n-1)\}\\ &\quad +\left\{\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\frac{2}{n(n+1)}\right\}\\ &= \frac{2}{3}-\frac{4}{n(n+1)(n+2)}\ . \end{aligned}$$

$n\geqq 2$ で $n-a_n>0$ より $n-a_n\neq 0$ であることに注意すると，$(*)$ より

$$b_n=\frac{2}{n}s_{n-1}$$

となり，$s_{n-1}\neq 0$(注) より

$$d_n=\boldsymbol{\frac{2}{n}}\ . \qquad \cdots(答)$$

(5) $b_n=\dfrac{2}{n}s_{n-1}$ を変形して $\dfrac{nb_n}{2}=s_{n-1}$ を得る．

これを $s_n-s_{n-1}=b_n$ に代入すると

$$\frac{(n+1)b_{n+1}}{2}-\frac{nb_n}{2}=b_n \quad (\ n\geqq 2\ )$$

となり，整理すると

$$\frac{b_{n+1}}{n+2}=\frac{b_n}{n+1} \quad (\ n\geqq 2\ )\ .$$

よって，

$$\frac{b_n}{n+1}=\frac{b_2}{3}=\frac{1}{3}$$

となり，

$$b_n=\boldsymbol{\frac{n+1}{3}} \quad (\ n\geqq 2\ )\ . \qquad \cdots(答)$$

(注) $s_1=b_1=1>0$ および $b_n=\dfrac{2}{n}s_{n-1}$ より，数学的帰納法を使うと $b_n>0$ が成立し，$s_{n-1}>0$ がわかる．

IV

(1)　$f'(x) = 2\sin x\cos x + 4\sin x + 4x\cos x - 4\sin x$

$$= 2\cos x(\sin x + 2x)\ .$$

ここで，$g(x) = \sin x + 2x$ とおくと，

$$g'(x) = \cos x + 2 > 0$$

より $g(x)$ は単調増加であるから，

$$x > 0 \text{ において } g(x) > g(0) = 0$$

となる．

よって，$f'(x)$ の符号は $\cos x$ の符号と一致するから，

$$\alpha_n = 2n\pi - \frac{3}{2}\pi\ ,\quad \beta_n = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

として，$f(x)$ の増減表は以下のようになる．

x	$(2n\pi - 2\pi)$	$\cdots$	α_n	$\cdots$	β_n	$\cdots$	$(2n\pi)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

極大値は $f(\alpha_n) = \boldsymbol{(8n-6)\pi + 1}$,　$\cdots$(答)

極小値は $f(\beta_n) = \boldsymbol{(-8n+2)\pi + 1}$.　$\cdots$(答)

(2)　以下, C_i ($i = 1$, 2 , 3) , C を積分定数とする．

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1\ ,$$

$$\int 4x\sin x\,dx = 4x(-\cos x) - \int 4(-\cos x)\,dx$$
$$= -4x\cos x + 4\sin x + C_2\ ,$$

$$\int 4\cos x\,dx = 4\sin x + C_3$$

となるので，

$$\int f(x)\,dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - 4x\cos x + 8\sin x + C}\ .$$

$\cdots$(答)

(3)　$h(x) = x - \sin x$ とおくと，$0 < x < \dfrac{\pi}{6}$ において

$$h'(x) = 1 - \cos x > 0$$

となるから，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$ において $h(x)$ は単調増加である．よって，この区間において

$$0 = h(0) \leqq h(x)$$

となるので $\sin x \leqq x$ が成立する．

一方, $k(x) = \sin x - \dfrac{3}{\pi}x$ とおくと

$$k'(x) = \cos x - \frac{3}{\pi}\ .$$

$\cos\gamma = \dfrac{3}{\pi}\ \left(0 < \gamma < \dfrac{\pi}{6}\right)$ を満たす γ が存在し，これを用いて $k(x)$ の増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$ において $0 \leqq k(x)$ となるので，$\dfrac{3}{\pi}x \leqq \sin x$ が成立する．　(証明終り)

(4)　(1) より，$f(x)$ は開区間 $\left(2n\pi - \dfrac{1}{n\pi},\ 2n\pi\right)$ において単調増加であり，$f(2n\pi) = 4 > 0$ であるので

$$f\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) < 0$$

を示せばよい．

$f\left(2n\pi - \dfrac{1}{n\pi}\right)$ の値を求めると

$$\sin^2\frac{1}{n\pi} - \left(8n\pi - \frac{4}{n\pi}\right)\sin\frac{1}{n\pi} + 4\cos\frac{1}{n\pi}$$
$$= \sin^2\frac{1}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{1}{n\pi} - 8n\pi\sin\frac{1}{n\pi} + 4\cos\frac{1}{n\pi}\ .$$

ここで，$0 \leqq \dfrac{1}{n\pi} \leqq \dfrac{\pi}{6}$ に注意して，(3) で示した不等式を使うと，

$$\frac{3}{n\pi^2} \leqq \sin\frac{1}{n\pi} \leqq \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{3}$$

となるから，

$$f\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) < \frac{1}{9} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} - 8n\pi\cdot\frac{3}{n\pi^2} + 4$$
$$= \frac{5}{9} + 4 - \frac{24}{\pi} < 0$$

となり，題意が成立する．　(証明終り)

(5) $\theta_n = 2n\pi - p_n$ とおくと，(4) の結果より，

$$0 < \theta_n < \frac{1}{n\pi} \left(< \frac{\pi}{6} \right) . \qquad \cdots ①$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = 0$ より，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0 . \qquad \cdots ②$$

さて，$I_n = \displaystyle\int_{p_n}^{p_{n+1}} f(x)\,dx$ とおくと，

$$I_n = \int_{p_n}^{2n\pi} f(x)\,dx + \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} f(x)\,dx + \int_{(2n+2)\pi}^{p_{n+1}} f(x)\,dx .$$

ここで，$t = x - 2n\pi$ と置換すると，

$$\begin{aligned}\int_{p_n}^{2n\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\theta_n}^{0} f(t+2n\pi)\,dt \\ &= \int_{-\theta_n}^{0} \{f(t) + 8n\pi \sin t\}\,dt \\ &= \int_{-\theta_n}^{0} f(t)\,dt + 8n\pi \Big[-\cos t\Big]_{-\theta_n}^{0} \\ &= \int_{0}^{\theta_n} f(t)\,dt - 8n\pi(1-\cos\theta_n) .\end{aligned}$$

（$f(t)$，$\cos t$ は偶関数であるから．）

① と (1) の結果より，$0 \leqq t \leqq \theta_n$ において，

$$0 < 4 = f(0) \leqq f(t) \leqq f(\theta_n) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 8$$

であるから，

$$0 < \int_0^{\theta_n} f(t)\,dt < \int_0^{\theta_n} 8\,dt = 8\theta_n .$$

これと ② より，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\theta_n} f(t)\,dt = 0 . \qquad \cdots ③$$

また，① と (3) の結果より，

$$1 - \cos\theta_n = \frac{\sin^2\theta_n}{1+\cos\theta_n} < \frac{{\theta_n}^2}{1+\cos\theta_n} .$$

$$0 < n\pi(1-\cos\theta_n) < \frac{n\pi{\theta_n}^2}{1+\cos\theta_n} < \frac{\theta_n}{1+\cos\theta_n} .$$

ここで，② より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n}{1+\cos\theta_n} = 0$.

よって，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} n\pi(1-\cos\theta_n) = 0 . \qquad \cdots ④$$

③，④ より，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{p_n}^{2n\pi} f(x)\,dx = 0 .$$

同様に

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(2n+2)\pi}^{p_{n+1}} f(x)\,dx = 0 .$$

また，

$$\begin{aligned}&\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} f(x)\,dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - 4x\cos x + 8\sin x\right]_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \\ &= -7\pi .\end{aligned}$$

以上より，

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0 - 7\pi + 0 = \boldsymbol{-7\pi} . \qquad \cdots (答)$$