Ⅰ

(1) a, b は実数のもとで考えると、与方程式は実数係数の3次方程式なので、$2+\sqrt{3}i$ を解にもつことより $2-\sqrt{3}i$ も解にもつ。残りの解は1つでそれを u とすると解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\bar{\alpha}+u=-a \\ \alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}u+u\alpha=3 \\ \alpha\bar{\alpha}u=-b \end{cases}$$

ただし、$\alpha=2+\sqrt{3}i$ である。これより

$$\begin{cases} 4+u=-a \\ 7+4u=3 \\ 7u=-b \end{cases}$$

であり、

$a=\boxed{-3}$ …(ア)、$b=\boxed{7}$ …(イ)、$u=-1$

与方程式の実数解は、

$x=\boxed{-1}$ …(ウ)

(2) $b=\dfrac{2}{a}$ とおくと

$$b=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3},$$

$$\begin{cases} a+b=2\sqrt{5}, \\ ab=2 \end{cases}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} A&=a^2+b^2 \\ &=(a+b)^2-2ab \\ &=(2\sqrt{5})^2-2\cdot 2 \\ &=\boxed{16} \quad \cdots(エ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B&=a^4+b^4 \\ &=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2 \\ &=16^2-2\cdot 2^2 \\ &=8(16\cdot 2-1) \\ &=\boxed{248} \quad \cdots(オ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C&=a^6+b^6 \\ &=(a^2+b^2)^3-3a^2b^2(a^2+b^2) \\ &=16^3-3\cdot 2^2\cdot 16 \\ &=16\cdot 4(16\cdot 4-3) \\ &=64\cdot 61 \\ &=\boxed{3904} \quad \cdots(カ) \end{aligned}$$

(3) $AC=x$, $\angle ABC=\theta$ とおく。四角形ABCDは円に内接するので $\angle ADC=\pi-\theta$. $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ において余弦定理を用いると、

$$\begin{cases} x^2=16+18-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}\cos\theta, \\ x^2=4+2-2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cos(\pi-\theta) \end{cases}$$

整理して、

$$\begin{cases} x^2=34-24\sqrt{2}\cos\theta, \\ x^2=6+4\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

これより、

$$x^2=10, \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$0<\theta<\pi$ より、

$\angle ABC=\theta=\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$ …(キ)

であり、$x>0$ より、

$AC=x=\boxed{\sqrt{10}}$ …(ク)

$\boxed{\text{I}}$

円Iの半径をRとすると，△ABCにおいて正弦定理を用いると

$$2R = \frac{AC}{\sin\theta}$$

$$R = \frac{\sqrt{10}}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \boxed{\sqrt{5}} \cdots (ケ)$$

四角形ABCDの面積をSとすると，

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} \\ &= 6 + 1 \\ &= \boxed{7} \cdots (コ) \end{aligned}$$

Ⅱ

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{a_n+2}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と $a_1=2$ より，

$$a_n>1\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

である．

(1)

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{2a_n+1}{a_n+2}-1}$$

$$=\frac{a_n+2}{a_n-1}$$

$$=\frac{(a_n-1)+3}{a_n-1}$$

$$=3b_n+1.$$

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$$

$$b_n+\frac{1}{2}=\left(b_1+\frac{1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$$

$b_1=\frac{1}{a_1-1}=1$ であるから，

$$b_n=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}$$

$$=\boxed{\frac{3^n-1}{2}}\quad\cdots(答)$$

(2) (1)より，$b_n\neq 0$ であり，

$$a_n-1=\frac{1}{b_n}$$

$$=\frac{2}{3^n-1}$$

$$a_n=\boxed{\frac{2}{3^n-1}+1}\quad\cdots(答)$$

(3) (2)より，

$$a_n+1=2\left(\frac{1}{3^n-1}+1\right)$$

$$=\frac{2\cdot 3^n}{3^n-1}.$$

$$c_n=\left(\frac{a_n+1}{a_n-1}\right)^2$$

$$=3^{2n}$$

である．よって，

$$c_n>10^{20}$$

$$\Leftrightarrow\ 3^n>10^{10}$$

$$\Leftrightarrow\ n\log_{10}3>10$$

$$\Leftrightarrow\ n>\frac{10}{\log_{10}3}\quad\cdots(*)$$

ここで，

$$\frac{10}{0.478}<\frac{10}{\log_{10}3}<\frac{10}{0.477}$$

$$\frac{10}{0.478}=20.92\cdots$$

$$\frac{10}{0.477}=20.96\cdots$$

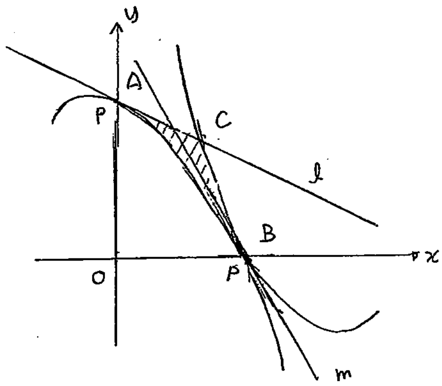
であり，n は自然数であるから，

$$(*)\ \Leftrightarrow\ n\geqq 21$$

よって，求める最小の自然数 n は

$$n=\boxed{21}\quad\cdots(答)$$

Ⅲ



(1)　$y=f(x)$ は点 A $(0,\ p)$ を通るから，
a を実数として
$$f(x)=-x^2+ax+p$$
とおける．さらに点 B $(p,\ 0)$ を通るから
$$f(p)=0.$$
$$-p^2+ap+p=0.$$
$p>0$ より　$-p+a+1=0.$
$$a=p-1$$
よって
$$f(x)=\boxed{-x^2+(p-1)x+p}\ \cdots(答)$$
また，$f'(x)=-2x+(p-1)$.
$$l:\ y=f'(0)x+f(0)$$
であり　$f'(0)=p-1,\quad f(0)=p.$
だから，l の方程式は
$$\boxed{y=(p-1)x+p}\ \cdots(答)$$
$$m:\ y=f'(p)(x-p)+f(p)$$
であり　$f'(p)=-p-1,\quad f(p)=0$
だから　m の方程式は
$$\boxed{y=-(p+1)(x-p)}\ \cdots(答)$$

(2)　$b,\ c$ を実数として
$$g(x)=x^2+bx+c$$
とおく．

$y=g(x)$ は点 B $(p,\ 0)$ を通り，
（B での接線の傾き）＝（m の傾き）
だから
$$g(p)=0,\qquad g'(p)=-(p+1).$$
$g'(x)=2x+b$ より
$$\begin{cases} p^2+bp+c=0 \\ 2p+b=-(p+1) \end{cases}$$
よって
$$b=-3p-1,\qquad c=2p^2+p$$
であり
$$g(x)=\boxed{x^2-(3p+1)x+2p^2+p}\ \cdots(答)$$

(3)　$y=g(x),\quad y=(p-1)x+p$
から　y を消去して
$$x^2-(3p+1)x+2p^2+p=(p-1)x+p$$
$$x^2-4px+2p^2=0.$$
$$x=(2\pm\sqrt{2})p.$$
C $(\alpha,\ \beta)$ とおくと α は小さい方の値であり，$p>0$ だから
$$\alpha=(2-\sqrt{2})p.$$
また
$$\beta=(p-1)\alpha+p=(\sqrt{2}-1)p(\sqrt{2}p+1)$$
$\alpha>0,\quad \beta>0$ より
$$\triangle OAC=\frac{1}{2}p\alpha,\qquad \triangle OBC=\frac{1}{2}p\beta.$$
$\triangle OAC:\triangle OBC=1:\sqrt{2}$ より
$$\beta=\sqrt{2}\alpha.$$
よって
$$(\sqrt{2}-1)p(\sqrt{2}p+1)=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})p$$
$$\sqrt{2}p+1=2.$$
$$p=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ \cdots(答)$$

Ⅲ

(4) 求める面積を S とすると, $0<\alpha<p$ より

$$S=\int_0^{\alpha}\left[(p-1)x+p-\{-x^2+(p-1)x+p\}\right]dx$$

$$+\int_{\alpha}^{p}\left[x^2-(3p+1)x+2p^2+p-\{-x^2+(p-1)x+p\}\right]dx$$

$$=\int_0^{\alpha}x^2\,dx+\int_{\alpha}^{p}2(x-p)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\alpha}+\left[\frac{2}{3}(x-p)^3\right]_{\alpha}^{p}$$

$$=\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{2}{3}(p-\alpha)^3.$$

$p=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha=\sqrt{2}-1$ より

$$S=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$=\boxed{\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)^2}$$ …(答)