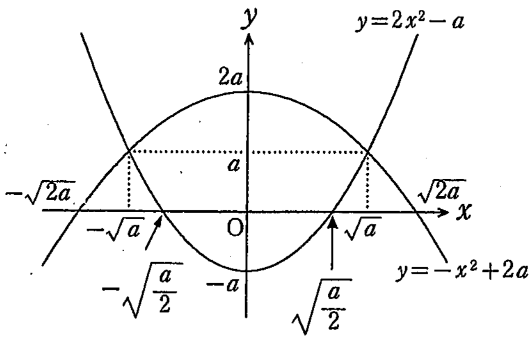
1

$\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{4}$　　　…①

$y=-x^2+2a=-(x+\sqrt{2a})(x-\sqrt{2a})$　…②

$y=2x^2-a=(\sqrt{2}x+\sqrt{a})(\sqrt{2}x-\sqrt{a})$　…③



とする．②と③の交点の x 座標は，

$$-x^2+2a=2x^2-a$$

$$3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$$

より，　$x=-\sqrt{a},\ \sqrt{a}$

与えられた条件より，A，Dの座標は，

$$\mathrm{A}(t,\ -t^2+2a),\quad \mathrm{D}(t,\ 2t^2-a)\quad (t>0)$$

である．

また，長方形ABCDにおいて，辺ADは y 軸に平行なので，辺ABは x 軸に平行であり，②，③は y 軸に関して対称なので，B，Cの座標は，

$$\mathrm{B}(-t,\ -t^2+2a),\quad \mathrm{C}(-t,\ 2t^2-a)$$

となる．さらに，「点Aの y 座標は，点Dの y 座標より大きい」という条件より，

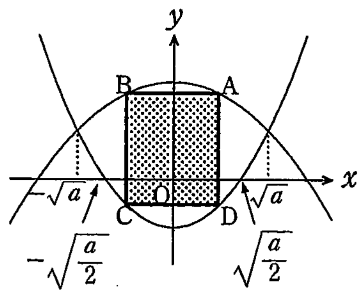
$$-t^2+2a>2t^2-a$$

$$3(t+\sqrt{a})(t-\sqrt{a})<0$$

$t>0$ より，　$0<t<\sqrt{a}$

(1)

(i)（点D の y 座標）$\leqq 0$ すなわち，$0<t\leqq\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ のとき，



原点Oは，長方形ABCDの周または内部に含まれ，

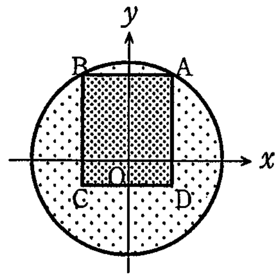
$$\mathrm{OA}^2-\mathrm{OD}^2=\{t^2+(-t^2+2a)^2\}-\{t^2+(2t^2-a)^2\}$$

$$=-3(t^2+a)(t+\sqrt{a})(t-\sqrt{a})>0$$

より，　$\mathrm{OA}^2>\mathrm{OD}^2$

$\mathrm{OA}>0$，$\mathrm{OD}>0$ だから，　$\mathrm{OA}>\mathrm{OD}$

したがって，　$\mathrm{OB}=\mathrm{OA}>\mathrm{OD}=\mathrm{OC}$　より，



長方形ABCDを原点を中心に1回転させてできる図形は，

右図のようなOAを半径とする円であるから，その面積は，

$$S=\pi\,\mathrm{OA}^2=\pi\{t^2+(-t^2+2a)^2\}=\pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2\}$$

1 （つづき１）

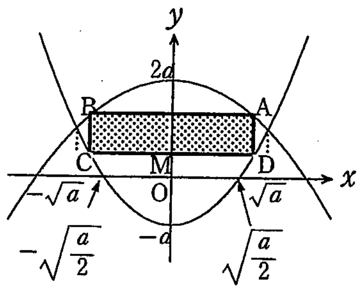
（ii）（点Dの y 座標）>0 すなわち，$\sqrt{\dfrac{a}{2}}<t<\sqrt{a}$ のとき，

原点Oは，長方形ABCDの外部にあり，

辺CDの中点をMとすると，

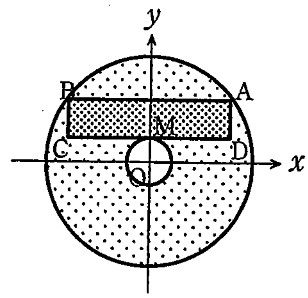
$$\mathrm{M}(0,\ 2t^2-a)$$

で，原点Oと長方形ABCDの周及び内部との距離の最小値がOMとなる．



また，（i）より　OA$>$OD なので，

長方形ABCDを原点を中心に１回転させてできる図形は，右図のような，OA，OMを半径とする同心円で挟まれたドーナツ型であるから，その面積は，



$$\begin{aligned} S&=\pi\,\mathrm{OA}^2-\pi\,\mathrm{OM}^2 \\ &=\pi\{t^2+(-t^2+2a)^2\}-\pi(2t^2-a)^2 \\ &=\pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2-(4t^4-4at^2+a^2)\} \\ &=\pi(-3t^4+t^2+3a^2) \end{aligned}$$

（i），（ii）より，

$$S=\begin{cases} \pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2\} & \left(0<t\leqq\sqrt{\dfrac{a}{2}}\ \text{のとき}\right) \\ \pi(-3t^4+t^2+3a^2) & \left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}<t<\sqrt{a}\ \ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

…（答）

$\boxed{1}$ （つづき２）

（２）（１）の結果より，$t^2=u$ とおき，

$$f(u)=\begin{cases} u^2-(4a-1)u+4a^2 & \left(0<u\leqq\dfrac{a}{2}\ \text{のとき}\right) \\ -3u^2+u+3a^2 & \left(\dfrac{a}{2}<u<a\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

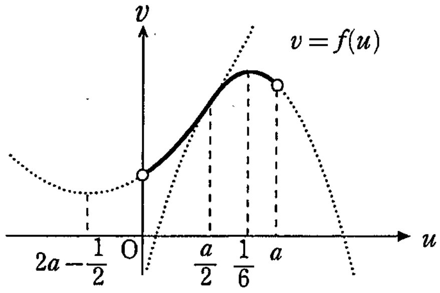
とすると，$f(u)$ が最大値をとるとき，S も最大値をとる．

$$f(u)=\begin{cases} \left\{u-\left(2a-\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2+2a-\dfrac{1}{4} & \left(0<u\leqq\dfrac{a}{2}\ \text{のとき}\right) \\ -3\left(u-\dfrac{1}{6}\right)^2+3a^2+\dfrac{1}{12} & \left(\dfrac{a}{2}<u<a\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

①より，$2a-\dfrac{1}{2}<0$，$\dfrac{a}{2}<\dfrac{1}{6}<a$ であるから，

$f(u)$ の最大値は，$3a^2+\dfrac{1}{12}$，

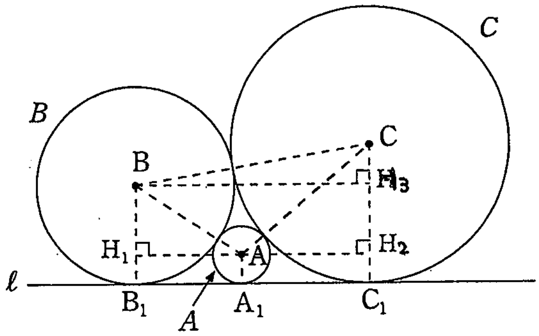
そのときの $u=t^2=\dfrac{1}{6}$



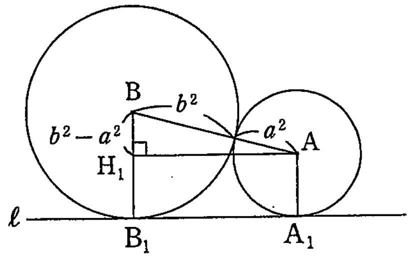
よって，S の最大値は $\left(3a^2+\dfrac{1}{12}\right)\pi$，そのときの t の値は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ …（答）

2 (1) 問題の条件から右図の様になる．$(0<a<b<c)$

3つの円A, B, Cの中心を
それぞれA, B, C，直線ℓとの
接点をA_1, B_1, C_1とし，Aから
BB_1, CC_1に下した垂線の足をH_1, H_2
BからCC_1に下した垂線の足をH_3
とする．



2つの円A, Bについて考える．
2円が外接するから
$$AB=a^2+b^2$$
2円がℓと接するから
$$BH_1=BB_1-AA_1=b^2-a^2$$
となり，直角三角形ABH_1に三平方の定理を用いて



$$\begin{aligned}AH_1&=\sqrt{AB^2-BH_1^2}\\&=\sqrt{(a^2+b^2)^2-(b^2-a^2)^2}\\&=\sqrt{4a^2b^2}\\&=2ab\quad(0<a<b\ \text{より})\end{aligned}$$

となる．
同様にして，$AH_2=2ca$，$BH_3=2bc$となる．
これらを用いて
$$\begin{aligned}BH_3&=AH_1+AH_2\\2bc&=2ab+2ca\\(b-a)c&=ab\\c&=\frac{ab}{b-a}\ \cdots\ (\text{答})\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ つづき

(2) 数列 a, b, c がこの順で等比数列で，$0<a<b<c$ より公比 r とすると

$r=\frac{b}{a}$ $(r>1)$ である．等比中項 b より

$$b^2=ac$$

となり，(1)の結果も用いて

$$b^2=a\cdot\frac{ab}{b-a}$$

$$(b-a)b=a^2$$

$$b^2-ab-a^2=0$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)-1=0$$

$$r^2-r-1=0$$

$r>1$ より　$r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ …（答）

(2)は次のようにしてもよい．

公比 r とすると

$$b=ar,\ c=ar^2\quad (r>1)$$

と表せて，(1)の結果に代入する

$$ar^2=\frac{a^2r}{ar-a}$$

$$r=\frac{1}{r-1}$$

$$r(r-1)=1$$

$$r^2-r-1=0$$

となる．

3

事象W：白球を1個取り出す

事象B_1：黒球を1個取り出し，かつ
サイコロを1回投げて3の倍数の目が出る

事象B_0：黒球を1個取り出し，かつ
サイコロを1回投げて3の倍数以外の目が出る

と表すことにする。

球はすべて区別し，黒球を取り出すごとにサイコロを投げる。

(1) $n=2$で総得点が2点となるのは次の3パターン。

[1] $W \to W$のとき　$\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$。

[2] $W \to B_1$ または $B_1 \to W$のとき　$\frac{5}{10}\times\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{6}\right)\times\frac{5}{9}=\frac{5}{27}$。

[3] $B_1 \to B_1$のとき　$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{2}{81}$。

よって求める確率は　$\frac{2}{9}+\frac{5}{27}+\frac{2}{81}=\frac{35}{81}$　…（答）

(2) 余事象「$n=3$で総得点が1点以下」を考えると次の3パターン。

[4] $B_0 \to B_0 \to B_0$のとき　$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}\right)=\frac{2}{81}$。

[5] $B_1 \to B_0 \to B_0$ または $B_0 \to B_1 \to B_0$ または $B_0 \to B_0 \to B_1$のとき

$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{6}\right)$$

$$=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2\times3=\frac{1}{27}。$$

[6] $W \to B_0 \to B_0$ または $B_0 \to W \to B_0$ または $B_0 \to B_0 \to W$ のとき

$$\frac{5}{10}\times\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\frac{5}{9}\times\left(\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\right)\times\frac{5}{8}$$

$$=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2\times3=\frac{5}{27}$$

よって求める「$n=3$で総得点が2点以上」となる確率は

$$1-\left(\frac{2}{81}+\frac{1}{27}+\frac{5}{27}\right)=\frac{61}{81}$$　…（答）

$\boxed{3}$（つづき）

【別解】

取り出す球の色とサイコロの目は独立なので，
球をすべて区別して取り出した順に並べたのち，黒球の個数と同じ回数サイコロを投げるとしてよい。

(1) $n=2$の場合

2個の球の取り出し方の総数は　${}_{10}P_2=90$通り　あり，
これらは同様に確からしい。総得点が2点となるのは次の3パターン。

[1] 2個とも白

白球2個の並べ方は　${}_5P_2=20$通り　なので，確率は　$\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$。

[2] 白，黒1個ずつで2点を得る

球の並べ方は　${}_5C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_2P_2=50$通り　あり，
サイコロを1回投げて3の倍数が出るときなので　$\dfrac{50}{90}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{5}{27}$。

[3] 2個とも黒で2点を得る

黒球2個の並べ方は　${}_5P_2=20$通り　あり，
サイコロを2回投げて2回とも3の倍数のときなので　$\dfrac{20}{90}\times\left(\dfrac{2}{6}\right)^2=\dfrac{2}{81}$。

よって求める確率は　$\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{27}+\dfrac{2}{81}=\dfrac{35}{81}$　…（答）

(2) 余事象「$n=3$で総得点が1点以下」を考える。

3個の球の取り出し方の総数は　${}_{10}P_3=720$通り　あり，
これらは同様に確からしい。

[4] 3個とも黒で0点または1点を得る

黒球3個の並べ方は　${}_5P_3=60$通り　あり，
サイコロを3回投げて　3の倍数が0回または1回だけ出るときなので

$$\frac{60}{720}\times\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^3+{}_3C_1\cdot\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2\right\}=\frac{5}{81}。$$

[5] 1個白，2個黒で1点を得る

同様に考えて　$\dfrac{{}_5C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3P_3}{720}\times\left(\dfrac{4}{6}\right)^2=\dfrac{5}{27}$。

よって求める確率は　$1-\left(\dfrac{5}{81}+\dfrac{5}{27}\right)=\dfrac{61}{81}$　…（答）

4

$A_n = xn^3 + yn^2$ とおき，条件 p を

$p : A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots$はすべて整数である

とする．

p であるためには，$A_1 = x + y$ が整数であることが必要であるから，

$x + y = l$ （l は整数）　…①

とおける．

このとき，A_n は

$$\begin{aligned} A_n &= (x+y)n^2 + x(n^3 - n^2) \\ &= ln^2 + xn^2(n-1) \\ &= ln^2 + B_n \quad (B_n = xn^2(n-1) \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

と表される．

p であるためには，さらに $A_2 = 4l + B_2$，$A_3 = 9l + B_3$ が整数であることが必要であるから，

$B_2 = 4x$，$B_3 = 18x$ はともに整数．

よって，x は $x = \dfrac{k}{2}$ （k は整数）と表される．

このとき ① より，$y = l - \dfrac{k}{2}$．

以上から，

$p \implies x = \dfrac{k}{2},\ y = l - \dfrac{k}{2}$ （k，l は整数）．　…②

逆に，$x = \dfrac{k}{2}$，$y = l - \dfrac{k}{2}$ （k，l は整数）ならば，

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{k}{2}n^3 + \left(l - \frac{k}{2}\right)n^2 \\ &= ln^2 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot nk \end{aligned}$$

はすべての正の整数 n に対して整数である（$n(n-1)$ は n の偶奇によらず偶数であるから）．

よって，

$x = \dfrac{k}{2},\ y = l - \dfrac{k}{2}$ （k，l は整数）$\implies p$．　…③

②，③ より，p が成り立つような x，y は，

$x = \dfrac{k}{2}$，　$y = l - \dfrac{k}{2}$　（k，l は整数）．

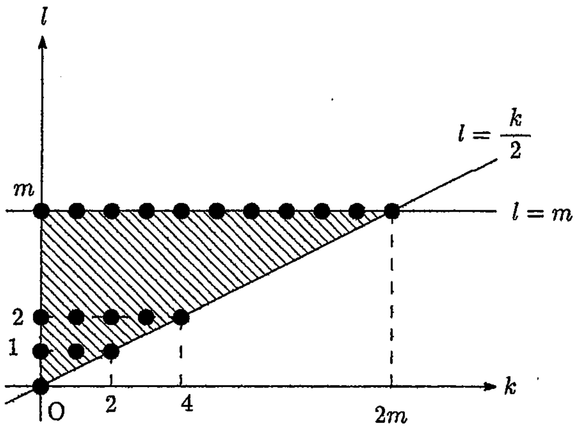
4 (つづき)

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq m$$

のとき，

$$k \geqq 0,\ \frac{k}{2} \leqq l \leqq m. \qquad \cdots ④$$

$(x,\ y)$ と $(k,\ l)$ は 1 対 1 に対応するから，求める点 $(x,\ y)$ の個数は，kl 平面において連立不等式 ④ の表す領域内に含まれる k 座標，l 座標がともに整数である点の個数に一致する.



したがって，求める個数は，

$$1+3+5+\cdots+(2m+1)=\frac{m+1}{2}\{1+(2m+1)\}$$
$$=(m+1)^2\ (個). \qquad \cdots (答)$$

【p の必要条件が $x=\frac{k}{2}$，$y=l-\frac{k}{2}$ （k，l は整数）であることを導くまでの別解】

p であるためには，A_1，A_2，A_3 が整数であることが必要であるから，l，m，i を整数として，

$$A_1=x+y=l,\ A_2=8x+4y=m,\ A_3=27x+9y=i.$$

A_2-4A_1，A_3-9A_1 を計算して，

$$4x=m-4l,\ 18x=i-9l.$$

よって，

$$x=\frac{18x-4\cdot 4x}{2}=\frac{(i-9l)-4(m-4l)}{2}$$
$$=\frac{k}{2} \quad (k=7l-4m+i \text{ とおいた．} l,\ m,\ i \text{ は整数であるから } k \text{ は整数.})$$

と表される.

このとき，$y=(x+y)-x=l-\frac{k}{2}$.

（別解終り）

5

白球を取り出し，1点獲得することを W

黒球を取り出し，1点獲得することを B_1 （黒球のとき，確率 $\frac{1}{3}$ で起こる）

黒球を取り出し，得点を獲得しないことを B_0 （黒球のとき，確率 $\frac{2}{3}$ で起こる）

と表す。

(1)　$n=2$ の場合

総得点が2点になるのは次の場合がある。

WW, WB_1, B_1W, B_1B_1

それぞれの確率は順に

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{5}{10}\cdot\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{54}$$

$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{54}$$

$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{81}$$

より，これらをすべて加えて

$$\frac{36+15+15+4}{162}=\frac{70}{162}=\frac{35}{81}\quad\cdots（答）$$

(2)　$n=4$ の場合

余事象の確率を用いる。

(ｉ)　総得点が0点のとき

$B_0\,B_0\,B_0\,B_0$ の場合であるから

$$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{1}{42}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\quad\cdots①$$

(ii)　総得点が1点のとき

(イ)　$W\,B_0\,B_0\,B_0$ の場合

順序が4通りあり，それらの確率が等しいことに注意して

$$\frac{5\cdot5\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\times4=\frac{5}{21}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\quad\cdots②$$

5 （つづき）

（ロ）　$B_1\,B_0\,B_0\,B_0$ の場合

順序が4通りあり，それらの確率が等しいことに注意して

$$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\times4=\frac{2}{63}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad \cdots③$$

よって総得点が1点以下である確率は ①，②，③を加えて

$$\frac{1}{42}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{5}{21}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{2}{63}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{42}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{21}+\frac{2}{63}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=\frac{36}{126}\cdot\frac{8}{27}$$

$$=\frac{16}{189}$$

よって求める確率は $1-\dfrac{16}{189}=\dfrac{173}{189}$　… （答）

(3)　$n=10$ の場合

袋の中のすべての球が取り出されることから，黒球の得点のみに着目すればよい。

（ｉ）　8点のとき　　B_0 が2回，B_1 が3回

（ⅱ）　9点のとき　　B_0 が1回，B_1 が4回

（ⅲ）　10点のとき　　B_1 が5回

（ｉ)，(ⅱ)，(ⅲ) の確率をすべて加えて

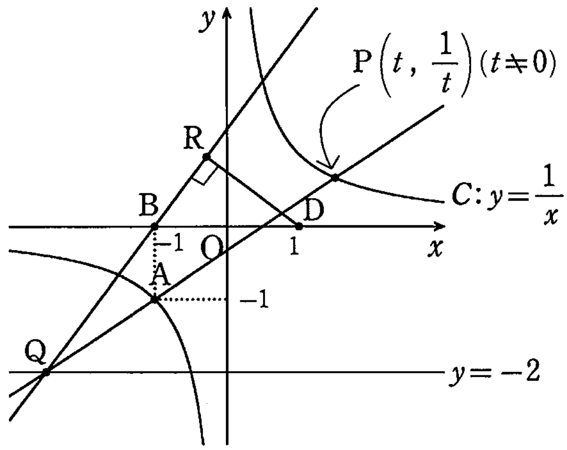
$${}_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_5C_1\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$=\frac{40+10+1}{243}$$

$$=\frac{51}{243}$$

$$=\frac{17}{81} \quad \cdots（答）$$

$\boxed{6}$



(1)　$t \neq -1$ のとき直線APの方程式は

$$y=\frac{\frac{1}{t}+1}{t+1}(x+1)-1.$$

$$y=\frac{1}{t}(x+1)-1. \qquad \cdots \quad ①$$

また，$t=-1$ のときはPとAが一致するので，直線APの方程式は，Aにおける C の接線 $y=-x-2$ であり①は $t=-1$ のときも成立．

①で $y=-2$ を代入すると，$x=-t-1$ が得られるので $\mathrm{Q}(-t-1,\ -2)$．… (＊)

よって，直線BQの方程式は，

$$y=\frac{0-(-2)}{-1-(-t-1)}(x+1).$$

$$y=\frac{2}{t}(x+1). \qquad \cdots \quad ②$$

点Dを通り，②に垂直な直線の方程式は，

$$y=-\frac{t}{2}(x-1). \qquad \cdots \quad ③$$

②と③の交点がRなので $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{cases} Y=\dfrac{2}{t}(X+1) & \cdots \quad ④ \\ Y=-\dfrac{t}{2}(X-1) & \cdots \quad ⑤ \end{cases}$$

(i)　$Y \neq 0$ のとき

④より，　$t=\dfrac{2}{Y}(X+1)$．

⑤に代入，整理して，　$X^2+Y^2=1$．

(ii)　$Y=0$ のとき

④より $X=-1$ となるが $(X,\ Y)=(-1,\ 0)$ は⑤を満たさず不適．

(i)，(ii)より点Rの軌跡は

円 $x^2+y^2=1$．（ただし2点 $(\pm 1,\ 0)$ を除く．）…（答）

$\boxed{6}$ （つづき１）

(2) 点Rは②と③の交点なので，②かつ③を解くと，$\mathrm{R}\left(\dfrac{t^2-4}{t^2+4},\ \dfrac{4t}{t^2+4}\right)$.

直線PRが原点を通る条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より，

$$t\cdot\frac{4t}{t^2+4}=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-4}{t^2+4}.$$

$$4t^3-t^2+4=0. \quad \cdots ⑥$$

求めるのは，t の方程式⑥の $t=0$ 以外の実数解の個数.

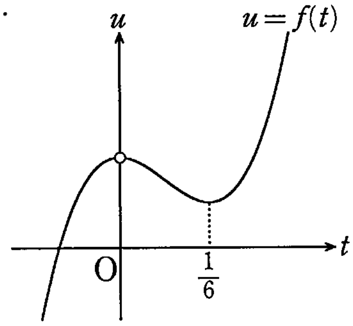
$f(t)=4t^3-t^2+4\ (t \fallingdotseq 0)$ とおくと，⑥の $t=0$ 以外の実数解は，$u=f(t)$ のグラフと t 軸の共有点の t 座標を表す.

$$f'(t)=12t^2-2t=2t(6t-1).$$

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになる.

t	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	(0)	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	(4)	↘		↗

これと，$f\left(\dfrac{1}{6}\right)=4-\dfrac{1}{108}>0$ であることから，$u=f(t)$ のグラフは次のようになり，⑥の $t=0$ 以外の実数解は１個.



求める個数は，　1.　　　　　$\cdots$（答）

$\boxed{6}$ （つづき２）

【(1)の別解】

(＊)の後は次のように考えることもできる．

t が０以外の実数値をすべてとることを考えると，直線 BQ は点 B を通る直線のうち直線 $x=-1$，直線 $y=0$ 以外のすべての直線になりうる．

また，$\angle \mathrm{BRD}=\dfrac{\pi}{2}$ より，点 R は線分 BD を直径とする円周上を動く．

以上から，点 R の軌跡は，

円 $x^2+y^2=1$．（ただし２点 $(\pm 1,\ 0)$ を除く．）　…（答）

$\boxed{7}$

(1) $z^5-\dfrac{1}{z^5}=\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\left(z^4+z^2+1+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^4}\right)$ より,

$$\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)=z^4+z^2+1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}$$

が成立することを示せばよい.

ここで, $w^5=1$ であること, また,

$$\begin{gathered}w^5=1\\(w-1)(w^4+w^3+w^2+w+1)=0\\w^4+w^3+w^2+w+1=0\ (w\neq 1 \text{ より})\\w^4+w^3+w^2+w=-1\end{gathered}$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned}\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)&=w^5z^2-\frac{1}{w^3}-w^3+\frac{1}{w^5z^2}\\&=z^2+\frac{1}{z^2}-(w^2+w^3)\\\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)&=w^5z^2-\frac{1}{w}-w+\frac{1}{w^5z^2}\\&=z^2+\frac{1}{z^2}-(w^4+w)\end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned}&\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)\\&=\left\{z^2+\frac{1}{z^2}-(w^2+w^3)\right\}\left\{z^2+\frac{1}{z^2}-(w^4+w)\right\}\\&=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-(w+w^2+w^3+w^4)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+(w^2+w^3)(w^4+w)\\&=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-(w+w^2+w^3+w^4)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+w+w^2+w^3+w^4\\&=z^4+2+\frac{1}{z^4}+z^2+\frac{1}{z^2}-1\\&=z^4+z^2+1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\end{aligned}$$

となり, たしかに題意が成立することが示された.　　(証明終り)

(2) 複素数 α が $|\alpha|=1$ を満たすとき,

$$\begin{gathered}|\alpha|^2=1\\\alpha\overline{\alpha}=1\end{gathered}$$

より,

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}=\alpha-\overline{\alpha}=2i\times(\alpha\text{の虚部})$$

が成立することに注意して, (1) で $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}&(2i\sin\theta)\left\{2i\sin\left(\theta+\frac{2}{5}\pi\right)\right\}\left\{2i\sin\left(\theta+\frac{4}{5}\pi\right)\right\}\left\{2i\sin\left(\theta+\frac{6}{5}\pi\right)\right\}\left\{2i\sin\left(\theta+\frac{8}{5}\pi\right)\right\}\\&=2i\sin 5\theta\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ (つづき)

より，

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2}{5}\pi\right)\sin\left(\theta+\frac{4}{5}\pi\right)\sin\left(\theta+\frac{6}{5}\pi\right)\sin\left(\theta+\frac{8}{5}\pi\right)=\frac{1}{16}\sin 5\theta \quad \cdots ①$$

がすべての実数 θ で成立することが示された．　(証明終り)

これより $C=\dfrac{1}{16}$　$\cdots$(答)

(3) ①で $\theta=\dfrac{\pi}{10}$ とすると，

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{5\pi}{10}\sin\frac{9\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}\sin\frac{17\pi}{10}=\frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{2} \quad \cdots ②$$

を得る．$a=\sin\dfrac{\pi}{10}$, $b=\sin\dfrac{3\pi}{10}$ とすると，

$$\sin\frac{9\pi}{10}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\frac{\pi}{10}=a$$
$$\sin\frac{13\pi}{10}=\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{10}\right)=-\sin\frac{3\pi}{10}=-b$$
$$\sin\frac{17\pi}{10}=\sin\left(2\pi-\frac{3\pi}{10}\right)=-\sin\frac{3\pi}{10}=-b$$

であるから，②に用いて，

$$a^2b^2=\frac{1}{16}$$

$a>0$, $b>0$ より $ab>0$ となることに注意すると，

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=ab=\frac{1}{4} \quad \cdots(答)$$

【(1) 別解】

ド・モアブルの定理より，

$$(w^k)^5=w^{5k}=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

であるから 1, w, w^2, w^3, w^4 は $z^5-1=0$ の異なる5解である．よって，

$$z^5-1=(z-1)(z-w)(z-w^2)(z-w^3)(z-w^4)$$

と表せる．z を z^2 に置き換えると，

$$z^{10}-1=(z^2-1)(z^2-w)(z^2-w^2)(z^2-w^3)(z^2-w^4)$$

となる．両辺に $w^{10}(=1)$ をかけて，$w^5=1$ を用いると

$$\begin{aligned}z^{10}-1&=(z^2-1)(w^2z^2-w^3)(w^4z^2-w)(wz^2-w^4)(w^3z^2-w^2)\\&=(z^2-1)\left(w^2z^2-\frac{1}{w^2}\right)\left(w^4z^2-\frac{1}{w^4}\right)\left(wz^2-\frac{1}{w}\right)\left(w^3z^2-\frac{1}{w^3}\right)\end{aligned}$$

を得る．両辺を $z^5\ (\neq 0)$ で割ると，

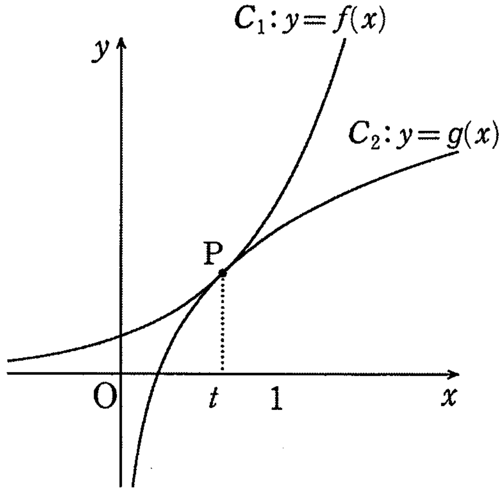
$$z^5-\frac{1}{z^5}=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)$$

つまり，

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)=z^5-\frac{1}{z^5}$$

が成立することが示された．

$\boxed{8}$



(1)　$f(x)=e^{ax}$，　$g(x)=a\log x+b$ とおくと，

$$f'(x)=ae^{ax}, \quad g'(x)=\frac{a}{x}.$$

2 曲線が点 P（ x 座標は t ）で接するので，

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases} \text{すなわち} \begin{cases} e^{at}=a\log t+b, & \cdots ① \\ ae^{at}=\dfrac{a}{t}. & \cdots ② \end{cases}$$

$a \neq 0$ なので ② より，

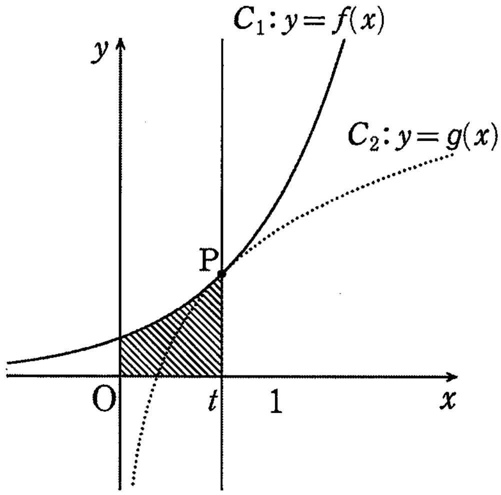
$$e^{at}=\frac{1}{t}.$$

$$at=-\log t.$$

$$a=-\frac{\log t}{t}. \qquad \cdots（答）$$

① に代入して，

$$b=\frac{(\log t)^2+1}{t}. \qquad \cdots（答）$$



(2)　$0<t<1$ より $\log t<0$．よって，$a>0$．
したがって，図より，

$$S_1(t)=\int_0^t e^{ax}dx=\left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^t=\frac{1}{a}(e^{at}-1)$$

$$=-\frac{t}{\log t}\left(\frac{1}{t}-1\right)=\frac{t-1}{\log t}.$$

ここで，$t-1=u$ とおくと，$t\to 1-0$ のとき，

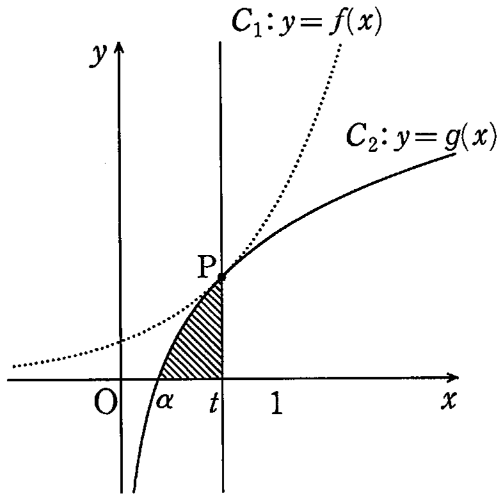
$$u\to -0, \quad t=1+u.$$

よって，
$$\lim_{t\to 1-0} S_1(t)=\lim_{u\to -0}\frac{u}{\log(1+u)}$$

$$=\lim_{u\to -0}\frac{1}{\dfrac{\log(1+u)}{u}}$$

$$=\frac{1}{1}=1. \qquad \cdots（答）$$

$\boxed{8}$ （つづき）



(3)　$g(x)=0$ を満たす実数を $x=\alpha$ とすると，

$$g(\alpha)=a\log\alpha+b=0 \quad \cdots \text{③}$$

より　$\log\alpha=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{(\log t)^2+1}{\log t}$.

$$\alpha=e^{\frac{(\log t)^2+1}{\log t}}.$$

$$\begin{aligned}
S_2(t)&=\int_\alpha^t (a\log x+b)dx\\
&=\Big[a(x\log x-x)+bx\Big]_\alpha^t\\
&=\Big[x\{(a\log x+b)-a\}\Big]_\alpha^t\\
&=t\{(a\log t+b)-a\}-\alpha\{(a\log\alpha+b)-a\}\\
&=t\left(\frac{1}{t}+\frac{\log t}{t}\right)-\alpha(0-a) \quad \text{((1) の結果と③より)}\\
&=1+\log t+\alpha a.
\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0} a=0$ であることと，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\frac{(\log t)^2+1}{\log t}=-\infty$ より $\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\alpha=0$ であることから，

$$\lim_{t\to 1-0} S_2(t)=1. \qquad \cdots \text{(答)}$$

9

(1) 数学的帰納法で示す．

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+xg_n(x) \quad \cdots ①$$
$$g_{n+1}(x)=g_n(x)-xf_n(x) \quad \cdots ②$$

(i) $n=1$ のとき

①，② から，

$$f_2(x)=f_1(x)+xg_1(x)=x+x\cdot 1=2x$$
$$g_2(x)=g_1(x)-xf_1(x)=1-x^2$$

で，

$$\{f_2(x)\}'=2,\ 2g_1(x)=2$$
$$\{g_2(x)\}'=-2x, -2f_1(x)=-2x$$

より成立する．

(ii) $n=k$ のとき

$$\{f_{k+1}(x)\}'=(k+1)g_k(x),\ \{g_{k+1}(x)\}'=-(k+1)f_k(x) \quad \cdots ③$$

が成立すると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}\{f_{k+2}(x)\}'&=\{f_{k+1}(x)+xg_{k+1}(x)\}' \quad (①より)\\&=\{f_{k+1}(x)\}'+g_{k+1}(x)+x\{g_{k+1}(x)\}'\\&=(k+1)g_k(x)+g_{k+1}(x)-(k+1)xf_k(x) \quad (③より)\\&=g_{k+1}(x)+(k+1)\{g_k(x)-xf_k(x)\}\\&=g_{k+1}(x)+(k+1)g_{k+1}(x) \quad (②より)\\&=(k+2)g_{k+1}(x)\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\{g_{k+2}(x)\}'&=\{g_{k+1}(x)-xf_{k+1}(x)\}' \quad (②より)\\&=\{g_{k+1}(x)\}'-f_{k+1}(x)-x\{f_{k+1}(x)\}'\\&=-(k+1)f_k(x)-f_{k+1}(x)-(k+1)xg_k(x) \quad (③より)\\&=-f_{k+1}(x)-(k+1)\{f_k(x)+gf_k(x)\}\\&=-f_{k+1}(x)-(k+1)f_{k+1}(x) \quad (①より)\\&=-(k+2)f_{k+1}(x)\end{aligned}$$

となるから，たしかに $n=k+1$ のときも成立する．

以上 (i)(ii) より，

$$\{f_{n+1}(x)\}'=(n+1)g_n(x),\ \{g_{n+1}(x)\}'=-(n+1)f_n(x) \quad \cdots ④$$

が成立することが示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終り)

9 (つづき 1)

次に，$f_n(x)$ の次数を a_n，$g_n(x)$ の次数を b_n とすると，④より，

$$a_{n+1} = b_n + 1 \qquad \cdots ⑤$$
$$b_{n+1} = a_n + 1 \qquad \cdots ⑥$$

であるから，⑤，⑥ より，

$$a_{n+2} = a_n + 2$$

を得る．これと $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ より $f_n(x)$ の次数は

$$\begin{cases} n & (n\text{ が奇数}) \\ n-1 & (n\text{ が偶数}) \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

となる．

(2) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき
$f_1(x) = x$, $g_1(x) = 1$ より，

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = f_1(\tan\theta)\cos\theta$$
$$\cos\theta = 1\cdot\cos\theta = g_1(\tan\theta)\cos\theta$$

より成立する．

(ii) $n=k$ のとき，

$$\sin k\theta = f_k(\tan\theta)\cos^k\theta,\ \cos k\theta = g_k(\tan\theta)\cos^k\theta$$

が成立すると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} \sin(k+1)\theta &= \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta \\ &= f_k(\tan\theta)\cos^k\theta\cos\theta + g_k(\tan\theta)\cos^k\theta\sin\theta \\ &= \{f_k(\tan\theta) + \tan\theta g_k(\tan\theta)\}\cos^{k+1}\theta \\ &= f_{k+1}(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta \\ \cos(k+1)\theta &= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta \\ &= g_k(\tan\theta)\cos^k\theta\cos\theta - f_k(\tan\theta)\cos^k\theta\sin\theta \\ &= \{g_k(\tan\theta) - \tan\theta f_k(\tan\theta)\}\cos^{k+1}\theta \\ &= g_{k+1}(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta \end{aligned}$$

となるから，たしかに $n=k+1$ のときも成立する．

以上，(i)(ii) より題意は示された．　(証明終り)

(3) $f_n(x) = ag_n(x)$ において $x = \tan\theta\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$f_n(\tan\theta) = ag_n(\tan\theta) \qquad \cdots ⑦$$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ において $\cos\theta \neq 0$ より $\cos^n\theta \neq 0$ ゆえ，⑦ は

$$f_n(\tan\theta)\cos^n\theta = ag_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

$\boxed{9}$ (つづき2)

となるから，これに (2) の結果を用いると，

$$\sin n\theta = a\cos n\theta$$
$$\sin n\theta - a\cos n\theta = 0$$
$$\sqrt{1+a^2}\sin(n\theta-\alpha) = 0 \qquad \cdots ⑧$$

を得る．ただし，α は $\tan\alpha = a$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ をみたす．

⑧より k を整数として，

$$n\theta - \alpha = k\pi \qquad \cdots ⑨$$

と表せる．$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$$-\frac{n\pi}{2} - \alpha < n\theta - \alpha = k\pi < \frac{n\pi}{2} - \alpha$$

であるから，⑨をみたす k は，

(i) n が奇数のとき

$$k = -\frac{n-1}{2},\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ \frac{n-1}{2}\ (n\text{個})$$

(ii) n が偶数のとき

- $a > 0$ のとき $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$$k = -\frac{n}{2},\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ \frac{n}{2}-1\ (n\text{個})$$

- $a = 0$ のとき $(\alpha = 0)$

$$k = -\frac{n}{2}+1,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ \frac{n}{2}-1\ (n-1\text{個})$$

- $a < 0$ のとき $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$

$$k = -\frac{n}{2}+1,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ \frac{n}{2}\ (n\text{個})$$

$x = \tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ のとき x と θ は1対1に対応することに注意すると，求める実数解の個数は，

$$\begin{cases} n-1 & (n\text{が偶数かつ}\ a=0\ \text{のとき}) \\ n & (\text{上記以外のとき}) \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$