【問 1】(文理共通)

(1) 袋 B を選び，かつ白玉が取り出される確率は

$$\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \qquad \cdots \text{アイ (答)}$$

「袋 A を選び，白玉を取り出すとき」と「袋 B を選び，白玉を取り出すとき」があるから，

$$\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{\boxed{7}}{\boxed{15}} \qquad \cdots \text{ウエ (答)}$$

袋 A を選び，白玉を取り出す確率は $\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}$ より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}}{\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{7}} \qquad \cdots \text{オカ (答)}$$

(2) 整数の組 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ が $1\leqq x_1<x_2<x_3\leqq 6$ をみたすのは，1〜6 の中から異なる 3 数を選び，小さい順に $x_1,\ x_2,\ x_3$ とするときである．

よって，求める組み合わせは ${}_6\mathrm{C}_3=\boxed{20}$ (通り)　　$\cdots$キ (答)

次に整数の組 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ が $1\leqq x_1=x_2<x_3\leqq 6$ をみたすのは，1〜6 の中から異なる 2 数を選び，小さい順に $x_1=x_2,\ x_3$ とするときである．

その組み合わせは ${}_6\mathrm{C}_2=15$ (通り) より，求める組み合わせは

$$20+15=\boxed{35}\ (\text{通り}) \qquad \cdots \text{ク (答)}$$

【問２】（文理共通）

$-1 \leqq \sin\alpha \leqq 1$，$-1 \leqq \sin 2\beta \leqq 1$ より，

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2+\sin\alpha} \leqq 1,\quad \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2+\sin 2\beta} \leqq 1$$

であるから，$\dfrac{1}{2+\sin\alpha}+\dfrac{1}{2+\sin 2\beta}=2$ のとき，

$$\frac{1}{2+\sin\alpha}=1,\quad \frac{1}{2+\sin 2\beta}=1$$

すなわち，

$$\sin\alpha=-1,\quad \sin 2\beta=-1$$

よって，k, l を整数として，

$$\alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad 2\beta=-\frac{\pi}{2}+2l\pi$$

と表せて，

$$|\alpha+\beta-8\pi|=\left|-\frac{3}{4}\pi+(2k+l)\pi-8\pi\right|=\left|\left(-\frac{35}{4}+2k+l\right)\pi\right|$$

k, l は任意の整数値をとり得るので，これが最小となるのは，$2k+l=9$ のとき，

$$|\alpha+\beta-8\pi|=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\pi.$$

…ケコ（答）

【問３】（文理共通）

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，条件より，

$$|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ |\vec{c}|=6,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos60^\circ=6,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot6\cdot\cos60^\circ=12,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=6\cdot3\cdot\cos60^\circ=9 \quad \cdots(*)$$

三角形ABCの外心がPより，Pは平面ABC上の点であるから，s, t, u を実数として，

$$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c} \quad (s+t+u=1)$$

と表せる．また，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{CP}|$ より，

$$|(s-1)\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2=|s\vec{a}+(t-1)\vec{b}+u\vec{c}|^2=|s\vec{a}+t\vec{b}+(u-1)\vec{c}|^2$$

すなわち，

$$\begin{aligned}&(s-1)^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2+2(s-1)t\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2u(s-1)\vec{c}\cdot\vec{a}\\&\quad=s^2|\vec{a}|^2+(t-1)^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2+2s(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(t-1)u\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}\\&\qquad=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+(u-1)^2|\vec{c}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2t(u-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(u-1)s\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(-2s+1)|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}-2u\vec{c}\cdot\vec{a}\\&\quad=(-2t+1)|\vec{b}|^2-2s\vec{a}\cdot\vec{b}-2u\vec{b}\cdot\vec{c}\\&\qquad=(-2u+1)|\vec{c}|^2-2t\vec{b}\cdot\vec{c}-2s\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

(*) を代入して，

$$9(-2s+1)-12t-18u=16(-2t+1)-12s-24u=36(-2u+1)-24t-18s$$

すなわち，

$$-18s-12t-18u+9=-12s-32t-24u+16=-18s-24t-72u+36$$

よって，

$$\begin{cases}-6s+20t+6u=7\\12t+54u=27\\s+t+u=1\end{cases}$$

これを解いて，

$$s=\frac{4}{15},\ t=\frac{3}{10},\ u=\frac{13}{30}$$

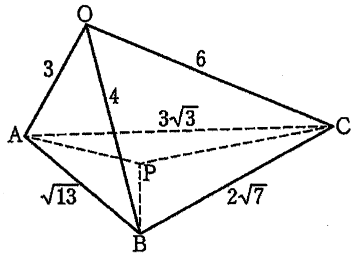
以上より，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{15}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{3}}{\boxed{10}}\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{13}}{\boxed{30}}\overrightarrow{OC}.$$

…サシスセソタ（答）

【問3】(文理共通)（つづき）

$\boxed{\text{別解}}$



余弦定理より

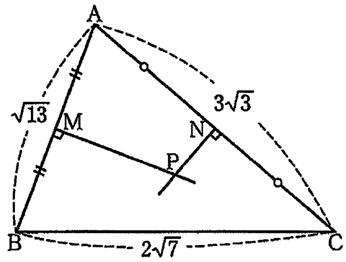
$$AB^2=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=13$$

$$BC^2=16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\cos\frac{\pi}{3}=28$$

$$CA^2=9+36-2\cdot6\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=27$$

となるから $AB=\sqrt{13}$, $BC=2\sqrt{7}$, $CA=3\sqrt{3}$ を得る．

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると $|\vec{b}|=\sqrt{13}$, $|\vec{c}|=3\sqrt{3}$ で,



$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=28$$

$$\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=28$$

$$\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{b}\right|^2=28$$

$27-2\vec{b}\cdot\vec{c}+13=28$ より，$\vec{b}\cdot\vec{c}=6$

いま，s, t を実数として $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とする．さらに AB, AC の中点を M, N とすると，$AB\perp MP$ より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}\right)=0$$

$$\vec{b}\cdot\left(s\vec{b}+t\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=0$$

$$\left(s-\frac{1}{2}\right)\left|\vec{b}\right|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$13\left(s-\frac{1}{2}\right)+6t=0$ より，$26s+12t=13$　……①

$AC\perp NP$ より

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NP}=0$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}\right)=0$$

$$\vec{c}\cdot\left(s\vec{b}+t\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)=0$$

$$s\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\left|\vec{c}\right|^2=0$$

$6s+27\left(t-\frac{1}{2}\right)=0$ より，$4s+18t=9$　……②

①, ② を連立して $s=\frac{3}{10}$, $t=\frac{13}{30}$

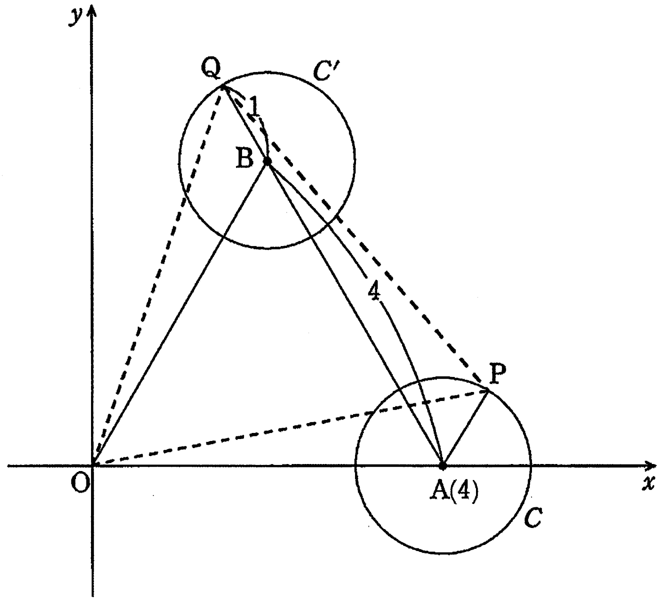
以上から $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{13}{30}\overrightarrow{AC}$ となるから始点を O に直して,

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{10}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{13}{30}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{15}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{3}}{\boxed{10}}\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{13}}{\boxed{30}}\overrightarrow{OC}$$

…サシスセソタ (答)

【問４】（理系）



円 C を原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転した円を C' とし，その中心を $\mathrm{B}(2,\ 2\sqrt{3})$ とする．点 Q は C' 上の点であり，線分 AQ の長さが最大となるのは，A，B，Q がこの順に 1 直線上に並ぶときであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\frac{5}{4}\begin{pmatrix}-2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

より，$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)$ である．

一方，点 $\mathrm{Q}(w)$ を $-\frac{\pi}{3}$ 回転した点が点 $\mathrm{P}(z)$ であるから，

$$z=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}w=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

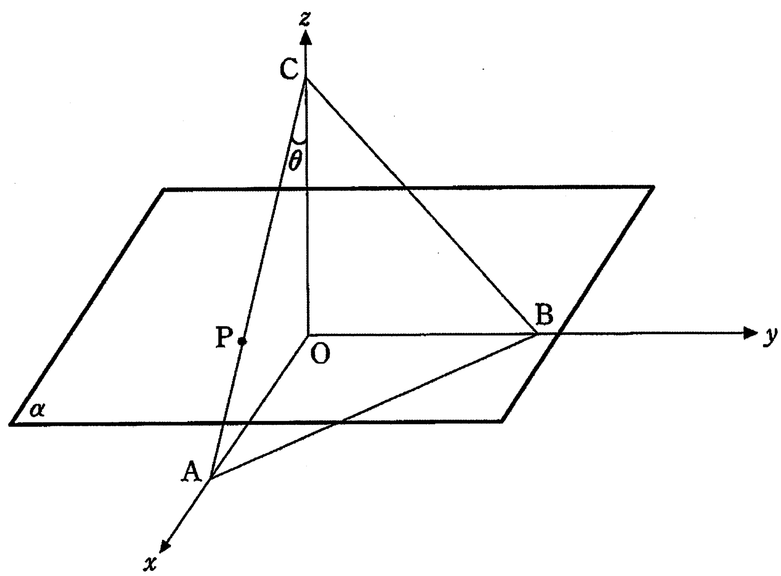
また，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$，$\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{3}$ より，三角形 OPQ は正三角形であるから，3 点 O，P，Q を通る円の中心は，三角形 OPQ の重心に一致する．よって，円の中心は，

$$\frac{0+z+w}{3}=\boxed{2}+\sqrt{\boxed{3}}\,i.$$ …チツ（答）

半径は，

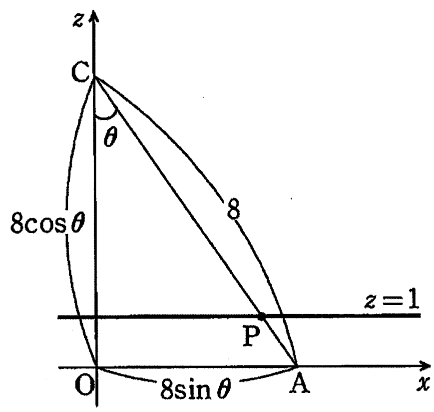
$$|2+\sqrt{3}i|=\sqrt{\boxed{7}}.$$ …テ（答）

【問５】（理系）



$\angle \mathrm{OCA}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，平面 α と直線 AC の交点 P の x 座標は，

$$x=8\sin\theta\cdot\frac{8\cos\theta-1}{8\cos\theta}=8\sin\theta-\tan\theta$$



これを $f(\theta)$ とおくと，

$$f'(\theta)=8\cos\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{8\cos^3\theta-1}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(2\cos\theta-1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta+1)}{\cos^2\theta}$$

よって，$f(\theta)$ の増減表は以下のようになる．

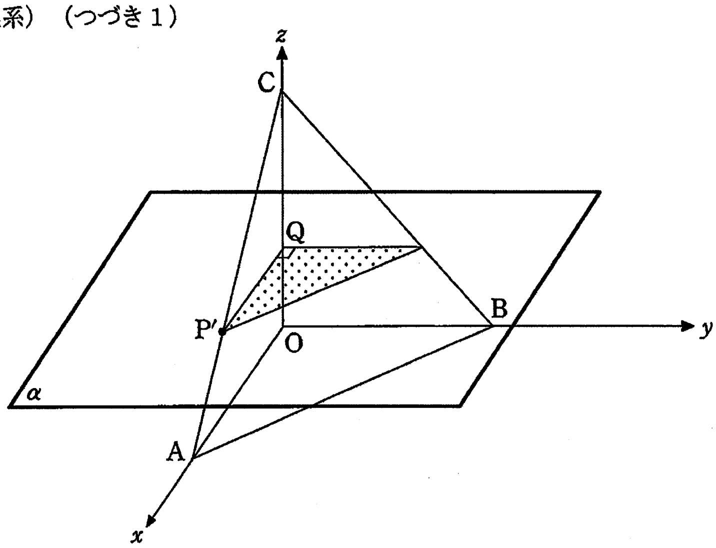
θ	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	

増減表より，$f(\theta)$ が最大となるのは $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のときであるから，点 P の x 座標が最大となるとき，

$$\angle \mathrm{OCA}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\pi.$$
… トナ（答）

x 座標が最大となるとき点 P を P′，平面 α と z 軸との交点を Q とすると，平面 α による V の断面は，線分 P′Q を直角を挟む辺にもつ直角二等辺三角形となる．

【問５】（理系）（つづき１）



$$\mathrm{P'Q}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=8\sin\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$$

より，求める断面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{3})^2=\frac{\boxed{27}}{\boxed{2}}.$$

…ニヌ（答）

同様に考えて，線分 AC と平面 $z=k$ $(0\leqq k\leqq 8)$ との交点を R とすると，R の x 座標は，

$$x=8\sin\theta\cdot\frac{8\cos\theta-k}{8\cos\theta}=8\sin\theta-k\tan\theta$$

これを $g(\theta)$ とおくと，

$$g'(\theta)=8\cos\theta-\frac{k}{\cos^2\theta}=\frac{8\cos^3\theta-k}{\cos^2\theta}$$

ここで，$k=8\cos^3 t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ を満たす角 t を定めると，領域 V の体積 V' は，

$$V'=\int_0^8\frac{1}{2}(8\sin t-k\tan t)^2dk$$

$$=32\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\sin t-\sin t\cos^2 t)^2\{24\cos^2 t(-\sin t)\}dt \qquad (k=8\cos^3 t \text{ を用いた})$$

$$=32\cdot24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t(1-\sin^2 t)\sin t\,dt=32\cdot24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)dt$$

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin^{n+1}t\,dt=\Big[(-\cos t)\sin^{n+1}t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)(n+1)\sin^n t\cdot\cos t\,dt$$

【問５】（理系）（つづき２）

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\sin^n t\,dt=(n+1)(I_n-I_{n+2})$$

より，

$$I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

これと，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

であることを合わせると，

$$I_7=\frac{6}{7}I_5=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}I_3=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{16}{35},\qquad I_9=\frac{8}{9}I_7$$

したがって，

$$V'=32\cdot 24(I_7-I_9)=32\cdot 24\left(I_7-\frac{8}{9}I_7\right)=32\cdot 24\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{16}{35}=\frac{4096}{105}=39.0\cdots$$

より，V' に最も近い整数は，$\boxed{39}$.　　　…ネ（答）

$\boxed{\text{別解}}$

$V'=\int_0^8\frac{1}{2}(8\sin t-k\tan t)^2dk$ において $k=8\cos^3 t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ より $\cos t=\frac{\sqrt[3]{k}}{2}$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
V'&=\int_0^8\frac{1}{2}(8\sin t-k\tan t)^2dk\\
&=\int_0^8\frac{1}{2}\sin^2 t\left(8-\frac{k}{\cos t}\right)^2dk\\
&=\int_0^8\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt[3]{k^2}}{4}\right)\left(8-2\sqrt[3]{k^2}\right)^2dk\\
&=\int_0^8\frac{1}{2}(4-k^{\frac{2}{3}})^3dk\\
&=\int_0^8\frac{1}{2}(64-48k^{\frac{2}{3}}+12k^{\frac{4}{3}}-k^2)\,dk\\
&=\left[32k-24\cdot\frac{3}{5}k^{\frac{5}{3}}+\frac{18}{7}k^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{6}k^3\right]_0^8\\
&=2^8-\frac{9}{5}\cdot 2^8+\frac{9}{7}\cdot 2^8-\frac{1}{3}\cdot 2^8\\
&=2^8\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2^{12}}{105}=39.0\cdots
\end{aligned}$$

より最も近い整数は $\boxed{39}$　　　…ネ(答)