【問 1】(文理共通)

(1) 袋 B を選び，かつ白玉が取り出される確率は

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \qquad \cdots アイ (答)$$

「袋 A を選び，白玉を取り出すとき」と「袋 B を選び，白玉を取り出すとき」があるから，

$$\frac{1}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{15}} \qquad \cdots ウエ (答)$$

袋 A を選び，白玉を取り出す確率は $\frac{1}{6} \times \frac{4}{5}$ より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{5}}{\frac{1}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{7}} \qquad \cdots オカ (答)$$

(2) 整数の組 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ が $1 \leqq x_1 < x_2 < x_3 \leqq 6$ をみたすのは，1〜6 の中から異なる 3 数を選び，小さい順に $x_1,\ x_2,\ x_3$ とするときである．

よって，求める組み合わせは ${}_6\mathrm{C}_3 = \boxed{20}$ (通り)　$\cdots$ キ (答)

次に整数の組 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ が $1 \leqq x_1 = x_2 < x_3 \leqq 6$ をみたすのは，1〜6 の中から異なる 2 数を選び，小さい順に $x_1 = x_2,\ x_3$ とするときである．

その組み合わせは ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ (通り) より，求める組み合わせは

$$20 + 15 = \boxed{35} \text{ (通り)} \qquad \cdots ク (答)$$

【問２】（文理共通）

$-1 \leqq \sin\alpha \leqq 1$，$-1 \leqq \sin 2\beta \leqq 1$ より，

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2+\sin\alpha} \leqq 1,\quad \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2+\sin 2\beta} \leqq 1$$

であるから，$\dfrac{1}{2+\sin\alpha} + \dfrac{1}{2+\sin 2\beta} = 2$ のとき，

$$\frac{1}{2+\sin\alpha} = 1,\quad \frac{1}{2+\sin 2\beta} = 1$$

すなわち，

$$\sin\alpha = -1,\quad \sin 2\beta = -1$$

よって，k, l を整数として，

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\quad 2\beta = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi$$

と表せて，

$$|\alpha+\beta-8\pi| = \left|-\frac{3}{4}\pi + (2k+l)\pi - 8\pi\right| = \left|\left(-\frac{35}{4} + 2k + l\right)\pi\right|$$

k, l は任意の整数値をとり得るので，これが最小となるのは，$2k+l=9$ のとき，

$$|\alpha+\beta-8\pi| = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\pi.$$

…ケコ（答）

【問3】（文理共通）

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，条件より，

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=6$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos60^\circ=6$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot6\cdot\cos60^\circ=12$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=6\cdot3\cdot\cos60^\circ=9$ $\cdots(*)$

三角形ABCの外心がPより，Pは平面ABC上の点であるから，s, t, u を実数として，

$$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\quad(s+t+u=1)$$

と表せる．また，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{CP}|$ より，

$$|(s-1)\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2=|s\vec{a}+(t-1)\vec{b}+u\vec{c}|^2=|s\vec{a}+t\vec{b}+(u-1)\vec{c}|^2$$

すなわち，

$$\begin{aligned}&(s-1)^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2+2(s-1)t\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2u(s-1)\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=s^2|\vec{a}|^2+(t-1)^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2+2s(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(t-1)u\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+(u-1)^2|\vec{c}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2t(u-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(u-1)s\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(-2s+1)|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}-2u\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=(-2t+1)|\vec{b}|^2-2s\vec{a}\cdot\vec{b}-2u\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=(-2u+1)|\vec{c}|^2-2t\vec{b}\cdot\vec{c}-2s\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

$(*)$ を代入して，

$$9(-2s+1)-12t-18u=16(-2t+1)-12s-24u=36(-2u+1)-24t-18s$$

すなわち，

$$-18s-12t-18u+9=-12s-32t-24u+16=-18s-24t-72u+36$$

よって，

$$\begin{cases}-6s+20t+6u=7\\12t+54u=27\\s+t+u=1\end{cases}$$

これを解いて，

$$s=\frac{4}{15},\ t=\frac{3}{10},\ u=\frac{13}{30}$$

以上より，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{15}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{3}}{\boxed{10}}\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{13}}{\boxed{30}}\overrightarrow{OC}.$$

… サシスセソタ（答）

【問3】(文理共通)（つづき）

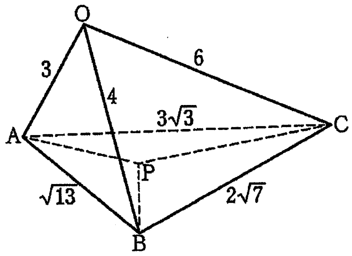
別解

余弦定理より

$$AB^2 = 9 + 16 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos\frac{\pi}{3} = 13$$

$$BC^2 = 16 + 36 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot \cos\frac{\pi}{3} = 28$$

$$CA^2 = 9 + 36 - 2\cdot 6\cdot 3\cdot \cos\frac{\pi}{3} = 27$$



となるから $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{7}$, $CA = 3\sqrt{3}$ を得る.

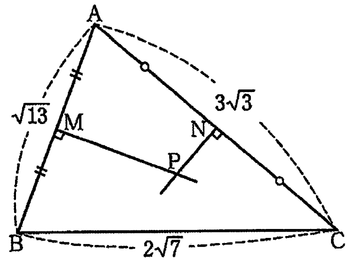
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると $|\vec{b}| = \sqrt{13}$, $|\vec{c}| = 3\sqrt{3}$ で,

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = 28$$

$$|\vec{c} - \vec{b}|^2 = 28$$

$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2 = 28$$

$27 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 13 = 28$ より, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 6$



いま, s, t を実数として $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ とする. さらに AB, AC の中点を M, N とすると, $AB \perp MP$ より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP} = 0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM}\right) = 0$$

$$\vec{b}\cdot\left(s\vec{b} + t\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = 0$$

$$\left(s - \frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2 + t\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

$13\left(s - \frac{1}{2}\right) + 6t = 0$ より, $26s + 12t = 13$ $\quad\cdots\cdots$①

$AC \perp NP$ より

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NP} = 0$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN}\right) = 0$$

$$\vec{c}\cdot\left(s\vec{b} + t\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) = 0$$

$$s\vec{b}\cdot\vec{c} + \left(t - \frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2 = 0$$

$6s + 27\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$ より, $4s + 18t = 9$ $\quad\cdots\cdots$②

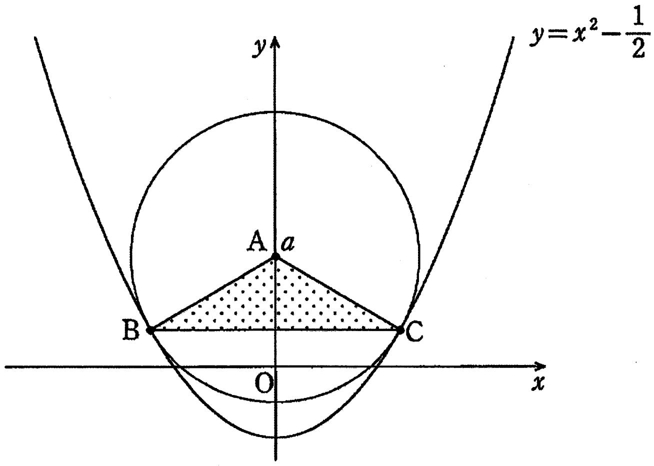
①, ② を連立して $s = \frac{3}{10}$, $t = \frac{13}{30}$

以上から $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{13}{30}\overrightarrow{AC}$ となるから始点を O に直して,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{10}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{13}{30}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{15}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{3}}{\boxed{10}}\overrightarrow{OB} + \frac{\boxed{13}}{\boxed{30}}\overrightarrow{OC}$$ $\quad\cdots$サシスセソタ (答)

【問４】（文系）



点 A$(0,\ a)$ を中心とする円の半径を r とすると，その方程式は，

$x^2+(y-a)^2=r^2$　…①

一方，$y=x^2-\frac{1}{2}$ において，$x^2=y+\frac{1}{2}$ として，①に代入すると，

$$y+\frac{1}{2}+(y-a)^2=r^2$$

$$y^2-(2a-1)y+a^2-r^2+\frac{1}{2}=0 \quad \cdots ②$$

円と放物線が２点で接することから，②の判別式を D とすると，条件は，

$D=0$ かつ (②の重解)$>-\frac{1}{2}$

であることから，

$$(2a-1)^2-4\left(a^2-r^2+\frac{1}{2}\right)=0 \text{ かつ } \frac{2a-1}{2}>-\frac{1}{2}$$

より，

$a=r^2-\frac{1}{4}$ かつ $a>\boxed{0}$.　　…チ（答）

このとき，②の重解は，$y=a-\frac{1}{2}$ であるから，B, C の座標は，

$$\left(\pm\sqrt{a},\ a-\frac{1}{2}\right)$$

よって，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\{\sqrt{a}-(-\sqrt{a})\}\left\{a-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}$$

より，

【問４】（文系）（つづき）

$k=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$，$p=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$.　　　… ツテトナ（答）

また，線分 BC と放物線で囲まれた領域の面積 S は，

$$S=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right\}dx=-\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})dx$$

$$=\frac{1}{6}\{\sqrt{a}-(-\sqrt{a})\}^3=\frac{4}{3}a\sqrt{a}=\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

より，

$l=\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$，$q=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$.　　　… ニヌネノ（答）

（$\boxed{チ}$ を求める部分の別解）

放物線上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ t^2-\dfrac{1}{2}\right)$ をとると，

$$\mathrm{AP}^2=t^2+\left(t^2-\frac{1}{2}-a\right)^2=t^4-2at^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$$

$t^2=u$ とおくと，$u\geqq 0$ であり，

$$\mathrm{AP}^2=u^2-2au+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=(u-a)^2+a+\frac{1}{4}$$

円と放物線が接するとき，AP の長さの最小値が円の半径に等しい．そこで，$u\geqq 0$ における AP^2 の最小値について調べる．

（ｉ）$a\leqq 0$ のとき，

AP^2 が最小となるのは，$u=0$ のときで，

$$\mathrm{AP}^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$$

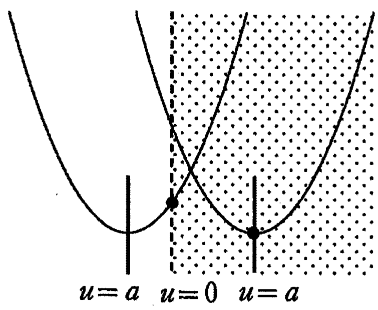
このとき，$t^2=0$ より，$t=0$

（ⅱ）$a>0$ のとき，

AP^2 が最小となるのは，$u=a$ のときで，

$$\mathrm{AP}^2=a+\frac{1}{4}$$

このとき，$t^2=a$ より，$t=\pm\sqrt{a}$



したがって，異なる 2 点で接するのは，t の値が 2 つあるときで，これは（ⅱ）の場合であるから求める a の条件は，

$a>\boxed{0}$.　　　… チ（答）

【問5】(文系)

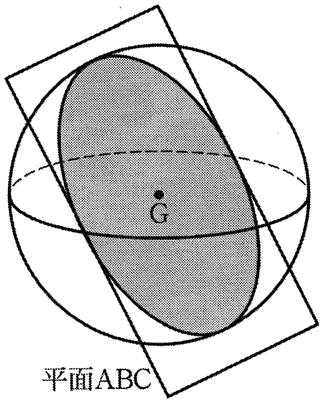
$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq 100$ より，

$$(x-3)^2+y^2+z^2+x^2+(y-6)^2+z^2+x^2+y^2+(z-9)^2 \leqq 100$$
$$3x^2-6x+3y^2-12y+3z^2-18z+26 \leqq 0$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \leqq \frac{16}{3} \qquad \cdots\cdots①$$

これは中心 $(1,\ 2,\ 3)$，半径 $\sqrt{\dfrac{16}{3}}$ の球の周および内部を表すから，P が動きうる領域は①と平面 ABC との共通部分である．

ここで，△ABC の重心を G とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=(1,\ 2,\ 3)$$



より球の中心は G，つまり平面 ABC 上の点であることに注意すると，P が動きうる領域は中心 G，半径 $\sqrt{\dfrac{16}{3}}$ の円の周および内部である．以上から，求める面積は

$$\pi\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)^2=\frac{\boxed{16}}{\boxed{3}}\pi \qquad \cdots ハヒ\ (答)$$

次に，平面 ABC の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ $(a,\ b,\ c$ は同時に 0 でない実数) とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 6,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3,\ 0,\ 9)$ で，

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases} \text{より} \begin{cases}-3a+6b=0\\ -3a+9c=0\end{cases} \text{つまり} \begin{cases}b=\dfrac{1}{2}a\\ c=\dfrac{1}{3}a\end{cases}$$

よって，$\vec{n}=\left(a,\ \dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{1}{3}a\right)$ となり $\vec{n}=(6,\ 3,\ 2)$ ととれる．また，xy 平面に対する法線ベクトルは $\vec{m}=(0,\ 0,\ 1)$ ととれる．平面 ABC と xy 平面のなす角を $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\cos\theta=\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}\right|=\left|\frac{6\cdot 0+3\cdot 0+2\cdot 1}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}\right|=\frac{2}{7}$$

Q が動きうる領域は，P が動きうる領域の xy 平面上への正射影より，求める面積は

$$\frac{16}{3}\pi\cdot\cos\theta=\frac{\boxed{32}}{\boxed{21}}\pi \qquad \cdots フヘ\ (答)$$