1

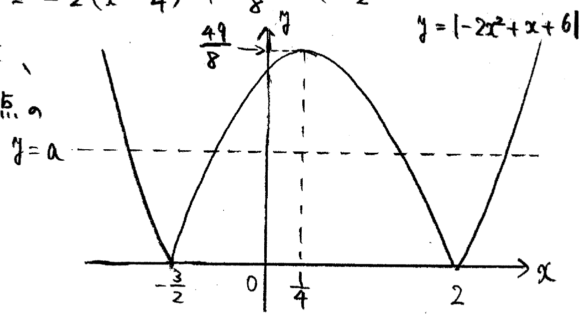
(ここには 1 の解答を記入すること。)

(1) $-2x^2+x+6=-(2x+3)(x-2)$ なので、

$$|-2x^2+x+6| = \begin{cases} 2x^2-x-6 & \left(x \leqq -\frac{3}{2},\ 2 \leqq x\right) \\ -2x^2+x+6 = -2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{49}{8} & \left(-\frac{3}{2} \leqq x \leqq 2\right) \end{cases}$$

である。与方程式の異なる実数解の個数は、$y=|-2x^2+x+6|$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数。求める a の値の範囲は

$0 < a \leqq \frac{49}{8}$ ……[答]



(2) (与式) $\iff |-2x^2+x+6| > |3x|$

$\iff (-2x^2+x+6)^2 > (3x)^2$　$(\because |-2x^2+x+6| \geqq 0,\ |3x| \geqq 0)$

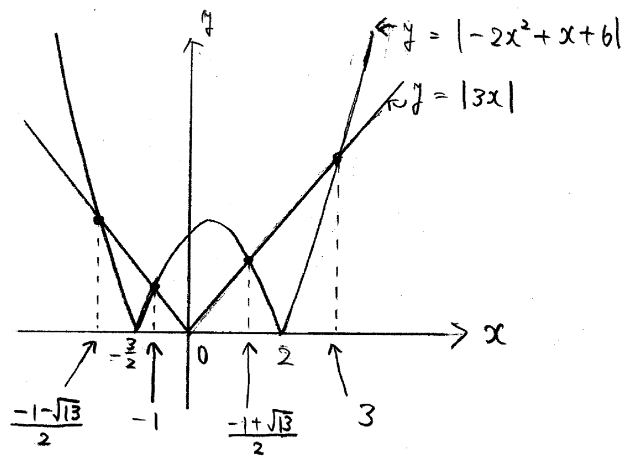
$\iff \{(-2x^2+x+6)+(3x)\}\{(-2x^2+x+6)-(3x)\} > 0$

$\iff (x+1)(x-3)\cdot\left(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) > 0$

である。$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -1 < \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < 3$ より、求める解は

$x < \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $-1 < x < \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $3 < x$ ……[答]

参考



$|-2x^2+x+6| > |3x|$ となる実数 x の値の範囲を、グラフを用いて求めることもできる。

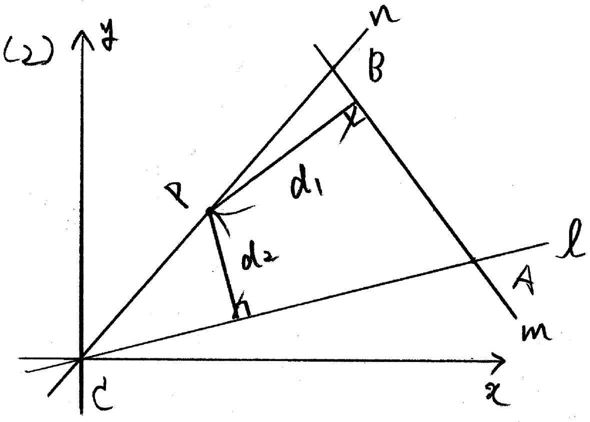
© 河合塾　2020年

2

(ここには 2 の解答を記入すること。)

(1) A(4, 1), B($\frac{5}{2}$, 3), C(0, 0) …… [答]

(2)



Pは n 上なので

P(5t, 6t) ($0<t<\frac{1}{2}$)

とすると

$$d_1=\frac{|4\cdot 5t+3\cdot 6t-19|}{\sqrt{16+9}}=\frac{19}{5}(1-2t)$$

$\therefore$ $0<d_1<\frac{19}{5}$ …… [答]

$$d_2=\frac{|5t-4\cdot 6t|}{\sqrt{1+16}}=\frac{19}{\sqrt{17}}t$$

$\therefore$ $0<d_2<\frac{19}{2\sqrt{17}}$ …… [答]

(3)

$$d_1d_2=\frac{19^2}{5\sqrt{17}}t(1-2t)$$

$$=\frac{361}{5\sqrt{17}}\left\{-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\right\}$$

$t=\frac{1}{4}$ で最大で　最大値 $\frac{361}{40\sqrt{17}}$ …… [答]

© 河合塾　2020 年

3　（ここには[3]の解答を記入すること。）

(1)　$g(x)=ax+b$ とおく．P, Q の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とする。

$f(x)=g(x) \iff f(x)-g(x)=0$

が重解 α, β をもつので

$$x^4-2x^2+4x-(ax+b)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

$$x^4-2x^2+(4-a)x-b = x^4-2(\alpha+\beta)x^3+\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$$

係数を比較して，

$\alpha+\beta=0$ ……①，$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-2$ ……②

$-2\alpha\beta(\alpha+\beta)=4-a$ ……③，$\alpha^2\beta^2=-b$ ……④

①を②に代入して，$\alpha\beta=-1$ を得る。これと①より

$\alpha=-1, \beta=1$。これらを③，④に代入することで

$a=4$, $b=-1$ であるから，

$g(x)=4x-1$ ……(答)

$y=h(x)$ のグラフが原点を通ることから，$h(x)=px^2+qx$

とおけて，P$(-1,-5)$，Q$(1,3)$ を通るように，

$$\begin{cases} p-q=-5 \\ p+q=3 \end{cases} \iff \begin{cases} p=-1 \\ q=4 \end{cases}$$

よって，$h(x)=-x^2+4x$ ……(答)

(2)　$f(x)-h(x)=x^4-2x^2+4x-(-x^2+4x)=x^4-x^2$

$\quad=x^2(x+1)(x-1)$

$y=f(x)$，$y=h(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $0, \pm1$ とわかる。また，$f(x)-h(x)<0$，つまり $y=h(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフの上側にある x の範囲は $-1<x<0$，$0<x<1$ である。よって，求める面積は，

$$\int_{-1}^{1}\{h(x)-f(x)\}dx=\int_{-1}^{1}(x^2-x^4)dx$$

$$=2\int_0^1(x^2-x^4)dx$$

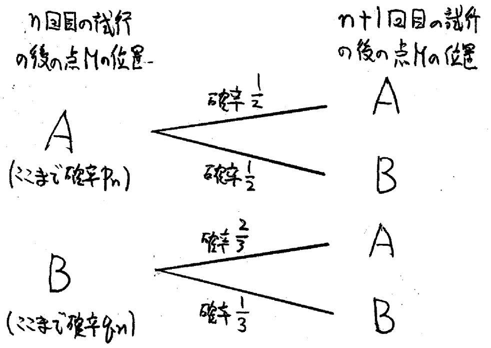
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{15}$$ ……(答)

© 河合塾　2020年

4 (ここには 4 の解答を記入すること。)

(1)



$\left(\begin{array}{l} p_n : n\text{回目の試行の後、点Mが}A\text{にいる確率} \\ q_n : n\text{回目の試行の後、点Mが}B\text{にいる確率} \end{array}\right)$

上の推移図より $p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{2}{3}q_n$, $q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n$ …[答]

(2) $p_n+q_n=1$ が成り立つので、(1)より

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{2}{3}(1-p_n) \rightleftarrows p_{n+1}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3} \rightleftarrows p_{n+1}-\frac{4}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)$$

これより $\left\{p_n-\frac{4}{7}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{6}$, 初項 $p_1-\frac{4}{7}=\frac{1}{2}-\frac{4}{7}=-\frac{1}{14}$ の等比数列。したがって、

$$p_n-\frac{4}{7}=-\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \qquad \therefore\ p_n=\frac{4}{7}-\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \cdots[答]$$

これと $p_n+q_n=1$ より、 $q_n=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ …[答]

© 河合塾　2020 年