1

（ここには 1 の解答を記入すること。）

(1)　$g(x)=ax+b$ とおく．P, Q の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とする。

$f(x)=g(x) \iff f(x)-g(x)=0$

が重解 α, β をもつので

$x^4-2x^2+4x-(ax+b)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$x^4-2x^2+(4-a)x-b = x^4-2(\alpha+\beta)x^3+\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$

係数を比較して，

$\alpha+\beta=0$ ……①，$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-2$ ……②

$-2\alpha\beta(\alpha+\beta)=4-a$ ……③，$\alpha^2\beta^2=-b$ ……④

①を②に代入して，$\alpha\beta=-1$ を得る。これと①より

$\alpha=-1, \beta=1$。これらを③,④に代入することで

$a=4$, $b=-1$ であるから，

$g(x)=4x-1$ ……(答)

$y=h(x)$ のグラフが原点を通ることから，$h(x)=px^2+qx$

とおけて，P$(-1,-5)$，Q$(1,3)$ を通るように，

$$\begin{cases} p-q=-5 \\ p+q=3 \end{cases} \iff \begin{cases} p=-1 \\ q=4 \end{cases}$$

よって，$h(x)=-x^2+4x$ ……(答)

(2)　$f(x)-h(x)=x^4-2x^2+4x-(-x^2+4x)=x^4-x^2$

$=x^2(x+1)(x-1)$

$y=f(x)$, $y=h(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $0, \pm1$ とわかる。また，

$f(x)-h(x)<0$，つまり $y=h(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフの上側に

ある x の範囲は $-1<x<0$，$0<x<1$ である。よって，求める面積は，

$$\int_{-1}^{1}\{h(x)-f(x)\}dx=\int_{-1}^{1}(x^2-x^4)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2-x^4)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{15} \quad \text{……(答)}$$

2

（ここには2の解答を記入すること。）

(1) m が3の倍数でないならば，整数 k を用いて

$$m = 3k+1,\ \text{または}\ 3k-1$$

と表すことができて，順に $m+2$，または $m+1$ は3の倍数である。

また，$m+2$，$m+1$ は連続する整数だから，一方は偶数である。

以上より，m が3の倍数でないならば $(m+2)(m+1)$ は $3\cdot 2 = 6$ の倍数である（∵ 3と2は互いに素）。

（証明おわり）

(2) m が奇数ならば，整数 l を用いて

$$m = 2l-1$$

と表すことができて，

$$(m+3)(m+1) = 4(l+1)l$$

において $(l+1)l$ は連続整数の積で (1) で述べたとおり偶数である。すなわち，m が奇数ならば $(m+3)(m+1)$ は8の倍数である。

（証明おわり）

(3) 対偶：「m が奇数ならば $(m+3)(m+2)(m+1)$ は24の倍数である」を証明する。

まず (2) より $(m+3)(m+2)(m+1)$ は8の倍数である。

次に，$m+3$，$m+2$，$m+1$ は連続する3整数だから，いずれか1つは3の倍数である。

以上と，8と3が互いに素であることから，m が奇数ならば $(m+3)(m+2)(m+1)$ が $8\cdot 3 = 24$ の倍数であることが証明された。

（証明おわり）

3

（ここには 3 の解答を記入すること。）

$$a_k=\int_c^k(12x-40)\,dx=\left[6x^2-40x\right]_c^k=6k^2-40k-6c^2+40c$$

$$-6c^2+40c=-c(6c-40)$$
$$=-\frac{20-\sqrt{526}}{6}(20-\sqrt{526}-40)=-21 \text{ より}$$

$$a_k=6k^2-40k-21$$

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(6k^2-40k-21)$

$=n(n+1)(2n+1)-20n(n+1)-21n=2n^3-17n^2-40n$ …[答]

(2) $f(x)=2x^3-17x^2-40x$ とおく $f'(x)=6x^2-34x-40$

$=2(3x-20)(x+1)$ より

$x\geqq 1$ のとき　$x<\frac{20}{3}$ で $f(x)$ は減少

$x>\frac{20}{3}$ で $f(x)$ は増加　　$S_n=f(n)$ なので

$1\leqq n\leqq 6$ で S_n は減少

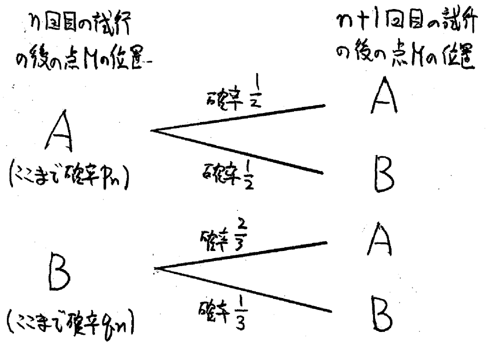
$7\leqq n$ 　で S_n は増加

$S_6=-420>S_7=-427$ より

最小値は -427 ……[答]

4（ここには4の解答を記入すること。）

（1）



$\left(\begin{array}{l} p_n : n\text{回目の試行の後、点MがAにいる確率} \\ q_n : n\text{回目の試行の後、点MがBにいる確率} \end{array}\right)$

上の推移図より $p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{2}{3}q_n$, $q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n$ …[答]

（2）　$p_n+q_n=1$ が成り立つので、(1)より

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{2}{3}(1-p_n) \rightleftarrows p_{n+1}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3} \rightleftarrows p_{n+1}-\frac{4}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)$$

これより $\left\{p_n-\frac{4}{7}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{6}$, 初項 $p_1-\frac{4}{7}=\frac{1}{2}-\frac{4}{7}=-\frac{1}{14}$ の等比数列。したがって、

$$p_n-\frac{4}{7}=-\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \qquad \therefore p_n=\frac{4}{7}-\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \cdots [答]$$

これと $p_n+q_n=1$ より、$q_n=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ …[答]

5 （ここには5の解答を記入すること。）

(1) 直線 l 上の点 z は，原点からの距離と点 α からの距離が等しい点なので

$$|z-0| = |z-\alpha|$$
$$\iff |z|^2 = |z-\alpha|^2$$
$$\iff z\bar{z} = (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})$$
$$\iff z\bar{z} = z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}$$
$$\iff \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |\alpha|^2 \quad \cdots\cdots ①$$

［証明おわり］

(2) (1)より，①が l の方程式である。
同様にして，m の方程式は

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = |\beta|^2 \quad \cdots\cdots ②$$

である。ここで，①$\times\beta$ − ②$\times\alpha$ より

$$(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})z = |\alpha|^2\beta - |\beta|^2\alpha \quad \cdots\cdots ③$$

l と m の交点は③の解 z である。
ここで，$\bar{\alpha}\beta$ が実数でないとすると，

$$\bar{\alpha}\beta \neq \alpha\bar{\beta} \iff \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} \neq 0$$

なので，③は解 $z = \dfrac{|\alpha|^2\beta - |\beta|^2\alpha}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}}$ をもつ。

逆に，$\bar{\alpha}\beta$ が実数であるとすると，

$$\bar{\alpha}\beta = \alpha\bar{\beta} \iff \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} = 0$$

である。このとき，③は

$$0\cdot z = \alpha\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}\beta = \alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \quad \cdots\cdots ③'$$

ここで，l, m は原点Oを通らないので，$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$。
また，l, m は異なる直線なので $\alpha \neq \beta$．したがって，③′の解 z は存在しない。以上より，$\bar{\alpha}\beta$ が実数でないことが l と m が交点をもつための必要十分条件である。［証明おわり］

また，交点があるとき，それは $z = \dfrac{|\alpha|^2\beta - |\beta|^2\alpha}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}}$ ．……(答)

6 （ここには 6 の解答を記入すること。）

(1)　$y=\tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ について，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ より，

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2}.$$

つまり，

$$\frac{d}{dx}\{f^{-1}(x)\}=\frac{1}{1+x^2}. \quad \cdots [答]$$

(2)　$x=\tan\theta$ とおけば，

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

，$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

であるから，

$$I_n=\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}\theta\, d\theta \quad (n \geqq 1).$$

これより，

$$I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n}\theta\, d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n-1}\theta\,(\sin\theta)'\,d\theta$$

$$=\Big[\cos^{2n-1}\theta\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2n-1)\cos^{2n-2}\theta\,(-\sin\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta\, d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n-2}\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+(2n-1)(I_n-I_{n+1}).$$

式を変形して，

$$2n\, I_{n+1}=(2n-1)I_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$I_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}I_n+\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}} \quad (n\geqq 1). \quad \cdots [答]$$

(3)　求めるものは I_3 である．

(1) の結果を用いて，

$$I_1=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\Big[f^{-1}(x)\Big]_0^1$$

$$=f^{-1}(1)-f^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

さらに (2) の漸化式を用いて，

$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4},$$

$$I_3=\frac{3}{4}I_2+\frac{1}{16}=\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}$$

$$=\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}. \quad \cdots [答]$$