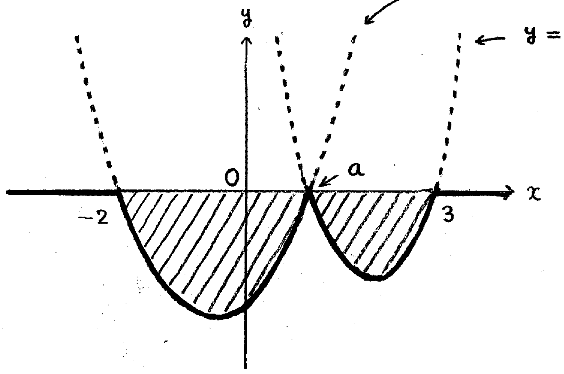
1

（ここには 1 の解答を記入すること。）



$-2<a<3$ のときの曲線 $y=f(x)$ は図の太線部分で，$S(a)$ は図の斜線部分の面積である．

(1)　$S(a) = -\int_{-2}^{a}(x+2)(x-a)\,dx - \int_{a}^{3}2(x-a)(x-3)\,dx$

（この立式は $a=-2,\ 3$ のときも成立）

$= \frac{1}{6}\{a-(-2)\}^3 + \frac{1}{3}(3-a)^3$

$= -\frac{1}{6}a^3 + 4a^2 - 7a + \frac{31}{3}$．　…［答］

(2)　$S'(a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8a - 7 = -\frac{1}{2}(a^2-16a+14)$ より，

$-2 \leqq a \leqq 3$ における $S(a)$ の増減は次のようになる．

a	-2	$\cdots$	$8-5\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{125}{3}$	↘	最小	↗	$\frac{125}{6}$

これより，$S(a)$ が最大となるのは $a=-2$．　…［答］

$S(a)$ が最小となるのは $a=8-5\sqrt{2}$．　…［答］

2

（ここには 2 の解答を記入すること。）

(1) $n \geqq 3$ のとき 不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ …(＊) が成り立つことを，
n に関する数学的帰納法により示す。

(i) $n = 3$ のとき
((＊)左辺) $= 8 + 9 + 8 = 25$，((＊)右辺) $= 27$ より (＊)は成り立つ。

(ii) $n = k \ (k \geqq 3)$ のとき (＊)が成り立つと仮定すると，

$$2^k + k^2 + 8 < 3^k$$

両辺に 3 をかけて

$$3(2^k + k^2 + 8) < 3^{k+1} \quad \cdots ①$$

また

$$3(2^k + k^2 + 8) - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\}$$
$$= 3 \cdot 2^k + 3k^2 + 24 - (2 \cdot 2^k + k^2 + 2k + 9)$$
$$= 2^k + 2k(k-1) + 15$$
$$> 0 \quad (\because k \geqq 3 \text{ より } k(k-1) > 0)$$
$$\therefore \ 2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3(2^k + k^2 + 8) \quad \cdots ②$$

①，② より $2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$ を得る。つまり $n = k+1$ のときも
(＊)は成り立つ。

(i)，(ii) より，$n \geqq 3$ のとき 不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つ。(証明おわり)

(2) (1) より，$2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ であるためには $n < 3$，つまり $n = 1, 2$ が必要。
逆に
・$n = 1$ のとき $2^1 + 1^2 + 8 = 11$，$3^1 = 3$
　$n = 2$ のとき $2^2 + 2^2 + 8 = 16$，$3^2 = 9$
より いずれの場合も $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ をみたす。よって，求める n は

$$n = 1, 2 \quad \cdots [答]$$

(3) $n > 0$，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より，$2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ のとき
$2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ が成り立つ。よって (2) より $n = 1, 2$ しかない。
$n = 1$ のとき $2^1 + 1^2 + 8 = 3^1 + a + b \iff a + b = 8$ …③
$n = 2$ のとき $2^2 + 2^2 + 8 = 3^2 + 2a + b \iff 2a + b = 7$ …④
③ については，$b = 8 - a$ と $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$。
④ については，$b = 7 - 2a$ と $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より $a = 0, 1, 2, 3$。
求める組 (a, b, n) は

$$(a,b,n) = (0,8,1), (1,7,1), (2,6,1), (3,5,1), (4,4,1),$$
$$(5,3,1), (6,2,1), (7,1,1), (8,0,1),$$
$$(0,7,2), (1,5,2), (2,3,2), (3,1,2) \quad \cdots [答]$$

$\boxed{3}$ （ここには $\boxed{3}$ の解答を記入すること。）

(1)　LとMの交点は

$$\begin{cases} -4x+3y+a=0 \\ 3x+4y-7a=0 \end{cases}$$

より $(x, y)=(a, a)$ である。この点がC上ならよく

$$a^2-2a\cdot a+a^2-4a+4=0$$

したがって，$a=1$　…………(答)

(2)　$C: (x-a)^2+(y-2)^2=a^2$

であるから，Cの中心は $(a, 2)$，半径は $|a|$ である。

Cの中心とLの距離 d は

$$d=\frac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{|6-3a|}{5}$$

CとLが異なる2つの共有点をもつ条件は

$$d<|a| \iff |6-3a|<5|a|$$

これを解いて，$a<-3$ または $a>\frac{3}{4}$　……(答)

(3)　CとLの共有点が0個，1個である条件はそれぞれ

$d>|a| \iff -3<a<\frac{3}{4}$，

$d=|a| \iff a=-3, \frac{3}{4}$

また，Cの中心とMの距離 $\dfrac{|3\cdot a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|8-4a|}{5}$

についても，Cの半径 $|a|$ と大小比較をすることで，下の表を得る。

ここで，(1)より $a=1$ のときには，CとLの2交点，CとMの2交点のうち，1個が一致することを考えて，求める a の値は

$a=-8, \frac{8}{9}, 1$ ……(答)

-8　-3　$\frac{3}{4}$　$\frac{8}{9}$　1　→ a

<table>
<tr><td>CとLの共有点</td><td colspan="2">2個</td><td>0個</td><td colspan="2">2個</td></tr>
<tr><td>CとMの共有点</td><td>2個</td><td colspan="3">0個</td><td>2個</td></tr>
</table>

（記号 | は「1個」を表す）

4

（ここには 4 の解答を記入すること。）

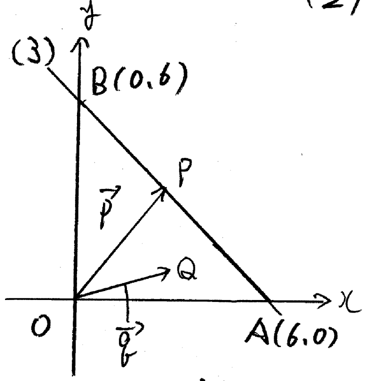
(1) $\vec{p}=(2s-t,\ -s+2t)=(x,y)$ より

$x+y=(2s-t)+(-s+2t)=s+t=6$ ….[答]

(2) $\vec{p}=(0,6)$ より $\begin{cases}2s-t=0\\-s+2t=6\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}s=2\\t=4\end{cases}$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_2=\frac{15}{64}$ ….[答]

(3)



$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$、$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$ とすると

$\angle POQ$ が $\frac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めれば良い。

(1)より点Pは図の直線AB上にあり

$s+t=6$ より

$\vec{p}=(2s-t,\ -s+2t)=(3s-6,\ 12-3s)$

$0\leqq s\leqq 6$ より $\vec{p}=(-6,12)(-3,9)(0,6)(3,3)(6,0)(9,-3)(12,-6)$

$\angle AOQ<\frac{\pi}{4}$ は明らかなので $\vec{p}=(3,3)(6,0)(9,-3)(12,-6)$ に限る。

$\vec{p}=(3,3)$ のとき $\cos\angle POQ=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\dfrac{12}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{4}{5}}>\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$\angle POQ\leqq\frac{\pi}{6}$ となり適する。このとき $(s,t)=(3,3)$

$\vec{p}=(6,0)$ のとき $\cos\angle POQ=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\dfrac{18}{6\cdot\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{9}{10}}>\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$\angle POQ\leqq\frac{\pi}{6}$ となり適する。このとき $(s,t)=(4,2)$

$\vec{p}=(9,-3)$ のとき $\cos\angle POQ=\dfrac{24}{3\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{4}{5}=\sqrt{\dfrac{16}{25}}<\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より不適当

$\vec{p}=(12,-6)$ のときは $\vec{p}=(9,-3)$ のときより $\angle POQ$ は大きくなるので不適当

以上より求める確率は

$\left(\frac{1}{2}\right)^6\left({}_6C_3+{}_6C_2\right)=\frac{35}{64}$ ….[答]