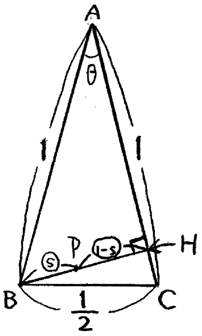
1

（ここには 1 の解答を記入すること。）

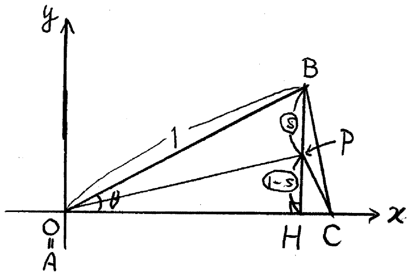


(1) △ABC に余弦定理を用いて、

$$\cos\theta = \frac{1^2+1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{7}{8} \quad \cdots(答)$$

$0<\theta<\pi$ だから、$\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8} \quad \cdots(答)$

(2)



(1) より、xy 平面上で

$A(0,0)$、$B\left(\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{15}}{8}\right)$、$C(1, 0)$

とすると、$H\left(\frac{7}{8}, 0\right)$、

$P\left(\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)\right)$ だから、

$$\begin{aligned} AP^2+BP^2+CP^2 &= \left\{\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)\right)^2\right\}+\left(\frac{\sqrt{15}}{8}s\right)^2 \\ &\quad +\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)\right)^2\right\} \\ &= \frac{25}{32}+\frac{15}{64}(3s^2-4s+2) \\ &= \frac{25}{32}+\frac{15}{64}\left\{3\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

$0<s<1$ より、$AP^2+BP^2+CP^2$ の最小値は

$$\frac{25}{32}+\frac{15}{64}\times\frac{2}{3} = \frac{15}{16} \quad \left(s=\frac{2}{3} \text{ のとき}\right) \quad \cdots(答)$$

2

(ここには 2 の解答を記入すること。)

(1) LとMの交点は

$$\begin{cases} -4x+3y+a=0 \\ 3x+4y-7a=0 \end{cases}$$

より $(x, y)=(a, a)$ である。この点がC上ならよく

$a^2-2a\cdot a+a^2-4a+4=0$

したがって, $a=1$ ………(答)

(2) $C: (x-a)^2+(y-2)^2=a^2$

であるから, Cの中心は $(a, 2)$, 半径は $|a|$ である.

Cの中心とLの距離 d は

$$d=\frac{|-4a+3\cdot2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{|6-3a|}{5}$$

CとLが異なる2つの共有点をもつ条件は

$d<|a| \iff |6-3a|<5|a|$

これを解いて, $a<-3$ または $a>\frac{3}{4}$ ……(答)

(3) CとLの共有点が0個, 1個である条件はそれぞれ

$d>|a| \iff -3<a<\frac{3}{4}$,

$d=|a| \iff a=-3, \frac{3}{4}$

また, Cの中心とMの距離 $\frac{|3\cdot a+4\cdot2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|8-4a|}{5}$

についても, Cの半径 $|a|$ と大小比較をすることで, 下の表を得る.

ここで, (1)より $a=1$ のときには, CとLの2交点, CとMの2交点のうち, 1個が一致することを考えて, 求める a の値は

$a=-8, \frac{8}{9}, 1$ ……(答)

<table>
<tr><td></td><td></td><td>-8</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>$\frac{3}{4}$</td><td></td><td>$\frac{8}{9}$</td><td>1 → a</td></tr>
<tr><td>CとLの共有点</td><td colspan="3">2個</td><td>|</td><td>0個</td><td>|</td><td colspan="3">2個</td></tr>
<tr><td>CとMの共有点</td><td>2個</td><td>|</td><td colspan="5">0個</td><td>|</td><td>2個</td></tr>
</table>

(記号 | は「1個」を表す)

3

（ここには3の解答を記入すること。）

(1) $n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ …(*) が成り立つことを，
n に関する数学的帰納法により示す。

(i) $n = 3$ のとき

((*)左辺) $= 8 + 9 + 8 = 25$，((*)右辺) $= 27$ より (*) は成り立つ。

(ii) $n = k$ $(k \geqq 3)$ のとき (*) が成り立つと仮定すると，

$$2^k + k^2 + 8 < 3^k$$

両辺に 3 をかけて

$$3(2^k + k^2 + 8) < 3^{k+1} \quad \cdots①$$

また

$$3(2^k + k^2 + 8) - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\}$$
$$= 3 \cdot 2^k + 3k^2 + 24 - (2 \cdot 2^k + k^2 + 2k + 9)$$
$$= 2^k + 2k(k-1) + 15$$
$$> 0 \quad (\because k \geqq 3 \text{ より } k(k-1) > 0)$$
$$\therefore \ 2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3(2^k + k^2 + 8) \quad \cdots②$$

①，② より $2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$ を得る。つまり $n = k+1$ のときも
(*) は成り立つ。

(i)，(ii) より，$n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つ。(証明おわり)

(2) (1) より，$2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ であるためには $n < 3$，つまり $n = 1, 2$ が必要。

逆に

・$n = 1$ のとき $2^1 + 1^2 + 8 = 11$，$3^1 = 3$

$n = 2$ のとき $2^2 + 2^2 + 8 = 16$，$3^2 = 9$

よりいずれの場合も $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ をみたす。よって，求める n は

$n = 1, 2$ …[答]

(3) $n > 0$，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より，$2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ のとき
$2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ が成り立つ。よって (2) より $n = 1, 2$ しかない。

$n = 1$ のとき $2^1 + 1^2 + 8 = 3^1 + a + b \iff a + b = 8$ …③

$n = 2$ のとき $2^2 + 2^2 + 8 = 3^2 + 2a + b \iff 2a + b = 7$ …④

③ については，$b = 8 - a$ と $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$。

④ については，$b = 7 - 2a$ と $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より $a = 0, 1, 2, 3$。

求める組 (a, b, n) は

$(a, b, n) = (0,8,1), (1,7,1), (2,6,1), (3,5,1), (4,4,1),$
$(5,3,1), (6,2,1), (7,1,1), (8,0,1),$
$(0,7,2), (1,5,2), (2,3,2), (3,1,2)$ …[答]

4　（ここには 4 の解答を記入すること。）

1回の試行において、「箱から白玉が出て、硬貨で表が出る」事象を X, 「箱から赤玉が出て、硬貨で表が出る」事象を Y, 「硬貨で裏が出る」事象を Z とする.

(1)　2回の試行の結果、手元に白玉が2個あるのは、1,2回目とも X が起きるときなので、求める確率は

$$\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{40}\quad\cdots\text{[答]}$$

(2)　3回の試行の結果、手元に白玉1個と赤玉1個があるのは、3回の事象の発生順が「$X\to Y\to Z$」, 「$Y\to X\to Z$」, 「$X\to Z\to Y$」, 「$Y\to Z\to X$」, 「$Z\to X\to Y$」, 「$Z\to Y\to X$」のいずれかになる場合である. したがって、求める確率は

$$\left\{\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\right\}+\left\{\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\right\}+\left\{\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{9}{40}\quad\cdots\text{[答]}$$

(3)　$n-1$ 回目までにちょうど4回硬貨で表が出て、続く n 回目でも硬貨で表が出ればよい. この間、箱から何色の玉が出るかは関係ない. したがって、

$$p_n=\left\{{}_{n-1}C_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\right\}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot 2^{n+3}}\quad\cdots\text{[答]}$$

(4)

$$p_{n+1}-p_n=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2^{n+4}}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot 2^{n+3}}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2^{n+4}}\{n-2(n-4)\}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2^{n+4}}\cdot(8-n)$$

と、n が5以上の整数であることから、

$n=5,6,7$ においては $p_{n+1}>p_n$, $n=8$ においては $p_{n+1}=p_n$,

$n=9,10,11,\cdots$ においては $p_{n+1}<p_n$.

これより $p_5<p_6<p_7<p_8=p_9>p_{10}>p_{11}>p_{12}>\cdots$ となり, p_n は

$n=8,9$ において最大となる. …[答]

5　（ここには5の解答を記入すること。）

$$z = \frac{-1}{t+i} \quad (t\ ;\ 実数)$$

(1) $z = \dfrac{-1}{t+i}\cdot\dfrac{t-i}{t-i} = \dfrac{-t}{t^2+1} + \dfrac{1}{t^2+1}i$ より

zの実部 $= \dfrac{-t}{t^2+1}$，zの虚部 $= \dfrac{1}{t^2+1}$ 〔答〕

(2) $\left|z-\dfrac{i}{2}\right|^2 = \left(\dfrac{-t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{t^2+1}-\dfrac{1}{2}\right)^2$

$= \dfrac{t^2+1}{(t^2+1)^2} - \dfrac{1}{t^2+1} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \left|z-\dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ 〔答〕

(3) (2)より点zは$\dfrac{i}{2}$を中心とする半径$\dfrac{1}{2}$の円周上にあることがわかるので，$-1\leqq t\leqq 1$のときにzがこの円周上のどの範囲にあるかを調べる。

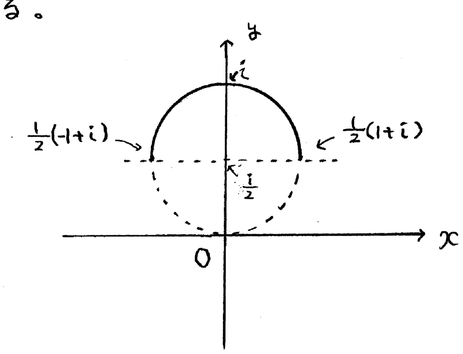
(i) $t=0$のとき　$z=i$

(ii) $-1\leqq t\leqq 1$，$t\neq 0$のとき，

0とzを結ぶ直線の傾きは$-\dfrac{1}{t}$であって，

$$\begin{cases} -1\leqq t<0 \text{ なら } 1\leqq -\dfrac{1}{t} \text{ かつ } \displaystyle\lim_{t\to -0}\left(-\dfrac{1}{t}\right)=\infty \\ 0<t\leqq 1 \text{ なら } -1\geqq -\dfrac{1}{t} \text{ かつ } \displaystyle\lim_{t\to +0}\left(-\dfrac{1}{t}\right)=-\infty \end{cases}$$

$-\dfrac{1}{t}$はtの連続関数だから，以上のことに注意すると，$-1\leqq t\leqq 1$の下で点zの描く図形は，下図実線部分が表す半円である。



6 （ここには 6 の解答を記入すること。）

$$A(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\,dx$$

$$(m=1,2,3,\cdots;\ n=1,2,3,\cdots)$$

(1)
$$A(m,n)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)\quad\left(\begin{array}{c}x+t=\frac{\pi}{2}\\ \text{で置換}\end{array}\right)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\cdot\cos^n t\,dt=A(n,m)$$

$$A(m+2,n)+A(m,n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{m+2}x\cdot\sin^n x+\cos^m x\cdot\sin^{n+2}x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\cdot(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\,dx=A(m,n)$$
［証明おわり］

(2)
$$A(m,1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin x\,dx=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\underline{\frac{1}{m+1}}}$$
［答］

(3)
$$A(m,n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^m x\cdot\sin x)\cdot\sin^{n+1}x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\cdot\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\cdot(n+1)\sin^n x\cdot\cos x\,dx$$
$$=\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\cdot\sin^n x\,dx=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,n)$$
［証明おわり］

(4) (1)に注意し，nが奇数の場合に証明をする。
$n=1$ のときは (2)で済んでいるから，$n\geqq 3$ として

$$A(m,n)=\frac{n-1}{m+1}A(m+2,n-2)$$
$$=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}A(m+4,n-4)\quad(\because (3))$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-2}A(m+n-1,1)$$
$$=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdot\cdots\frac{2}{m+n-2}\cdot\frac{1}{m+n}\quad(\because (2))$$

これは，有理数である．　［証明おわり］