第 1 問

$f(x)=x^3-3ax^2+b$ とおき，まず条件 1 を考察する．

C が点 $(t,0)$ において x 軸と接するための条件は，

$$f(t)=f'(t)=0 \quad \cdots ①$$

が成立することである．

$f'(x)=3x^2-6ax$ であるから，

$$① \iff \begin{cases} t^3-3at^2+b=0, \\ 3t(t-2a)=0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} t=0, \\ b=0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} t=2a, \\ b=4a^3 \end{cases} \right)$$

ただし，$b>0$ であるから，条件 1 は

$$a>0 \text{ かつ } b=4a^3 \quad \cdots ②$$

と同値である．

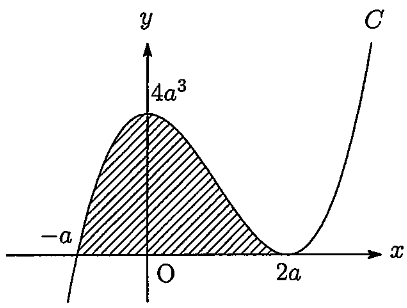
次に②のもとで条件 2 を考察する．

$$f(x)=x^3-3ax^2+4a^3=(x-2a)^2(x+a), \quad f'(x)=3x(x-2a)$$

より，$a>0$ を考慮すると $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって C の概形，および x 軸と C で囲まれた領域（斜線部）は次図の通りである．



斜線部の領域を D とする．ただし境界は含まない．また，「x 座標と y 座標がともに整数である点」を「格子点」とよぶことにする．

D は $y>0$ で表される領域に含まれること，および $f(x)$ の極大値が $f(0)=4a^3$ であることより，$4a^3 \leqq 1$ の場合は D に含まれる格子点は存在しないから，条件 2 を満たさない．よって，

$$4a^3>1 \text{ より，} a^3>\frac{1}{4}$$

が必要である．このとき D は格子点 $(0,1)$ を含む．

$4a^3>2$ の場合は D が格子点 $(0,2)$ も含むから条件 2 を満たさない．よって，

$$4a^3 \leqq 2 \text{ より，} a^3 \leqq \frac{1}{2}$$

も必要である．

第 1 問 (つづき)

したがって，以下では

$$\frac{1}{4} < a^3 \leqq \frac{1}{2} \qquad \cdots ③$$

のもとで考察を進める．

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} < 1^3$$

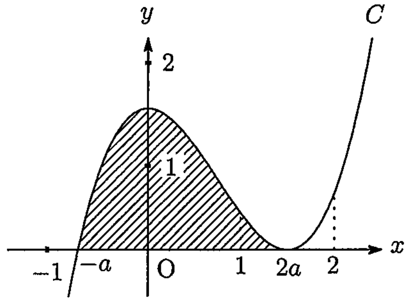
より，③のもとでは

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < a^3 < 1^3,\ すなわち\ \frac{1}{2} < a < 1$$

が成立する．よって，

$$-1 < -a, \quad 1 < 2a < 2$$

に注意する．



したがって，D 上の x 座標がとり得る整数値は 0 と 1 のみであるから，あとは

$$f(1) \leqq 1$$

を満たせば十分である．$f(1) = 1 - 3a + 4a^3$ より，$a(4a^2 - 3) \leqq 0$ となるが，$a > 0$ のもとでこれを解くと $a \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる．

ところが

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{1}{2}$$

より，③のもとでは $a \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が成立する．

以上より，a のとり得る値の範囲は③でよいから，

$$b = 4a^3, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \qquad \cdots (答)$$

第２問

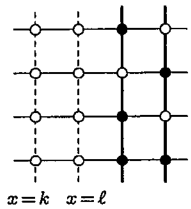
(1) 選んだ点を１個も含まない２本の直線は，

$$\begin{cases} \text{(i)} & x=k,\ \ell\ (1\leqq k<\ell\leqq 4), \\ \text{(ii)} & y=k,\ \ell\ (1\leqq k<\ell\leqq 4), \\ \text{(iii)} & x=k,\ y=\ell\ (1\leqq k\leqq 4,\ 1\leqq \ell\leqq 4) \end{cases}$$

の３つの場合がある．

(i) k, ℓ の選び方は，${}_4\mathrm{C}_2=6$ (通り)．

残りの２本 $x=m$, n 上の８点から５点を選ぶが，このとき，直線 $y=b\,(b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 上の２点がともに選ばれないことがあってはならない．このように，直線 $y=b\,(b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 上の２点がともに選ばれないのは，この直線を１本選び，選んだ直線 $y=b$ と $x=k$, ℓ 上にない６点から５点を選ぶときであるから，(i) となる選び方は，

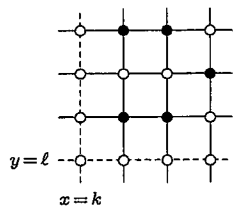


$$6\times\left({}_8\mathrm{C}_5-{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_5\right)=6\times(56-4\times 6)=192\ (\text{通り}).$$

(ii) (i) と同様に 192 (通り)．

(iii) k, ℓ の選び方は，${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$ (通り)．

残りの６本の直線上の９点から５点を選ぶが，選んだ点を１個も含まない直線があってはならない．このように $x=k$, $y=\ell$ 以外のある直線上に点が含まれない選び方は，この１本の直線上と $x=k$, $y=\ell$ 以外の６点から５点を選ぶときであるから，(iii) となる選び方は，



$$16\times\left({}_9\mathrm{C}_5-{}_6\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_5\right)=16\times(126-6\times 6)=1440\ (\text{通り}).$$

以上から，

$$192+192+1440=\mathbf{1824}\ (\text{通り}). \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 直線 $x=a\,(a=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ の中には，選ばれた５点のうち，２点を含む直線が１本だけ存在する．これを $x=k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とすると，k の選び方は ${}_4\mathrm{C}_1=4$ (通り)．

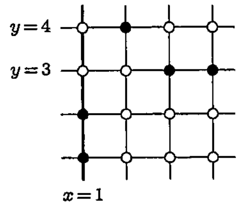
これに対して，$x=k$ 上での２点の選び方は，${}_4\mathrm{C}_2=6$ (通り)．

例えば $x=1$ 上の２点 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$ が選ばれたとすると，$x=2$, 3, 4 上には，選ばれた点がそれぞれ１点ずつ含まれる．

(i) それらの y 座標が，$x=1$ 上の点の y 座標と異なるとき．

それらの y 座標は，３または４となるが，すべてが３，すべてが４となってはならない．

よって，その選び方は，　$2^3-2=6$ (通り)．

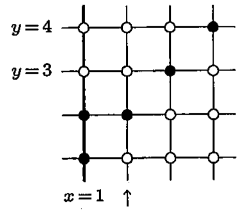


第2問　（つづき）

(ii) それらの y 座標のうち，1点だけが $x=1$ 上の点の y 座標と一致するとき．

その直線と y 座標を選ぶと，残り2点の選び方は2通りである．

よって，その選び方は，　${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times 2=12$ (通り)．



以上から，求める選び方は，

$$4\times 6\times(6+12)=\mathbf{432}\ (\text{通り}).\qquad\cdots(\text{答})$$

【(2)の別解】

16個の格子点から5点を選ぶ方法は，　${}_{16}\mathrm{C}_5=4368$ (通り)．

このうち条件を満たさないものを除く．

(a) 選んだ点を含まない直線が3本ある場合．

この3本の直線がすべて平行であるときは，選べる点が4点となるから不適である．したがって，3本の直線は2本の平行な直線と，それと直交する1直線からなる．

3直線の選び方は，　${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1\times 2=48$ (通り)．

この3直線上の点を除くと6点あるから，5点の選び方は，　${}_6\mathrm{C}_5=6$ (通り)．

よって，(a) を満たす5点の選び方は，

$$48\times 6=288\ (\text{通り}).$$

(b) 選んだ点を含まない直線が2本ある場合．

(1) より，　1824 (通り)．

(c) 選んだ点を含まない直線が1本ある場合．

1本の直線の選び方は，　${}_8\mathrm{C}_1=8$ (通り)．

選ばれた直線に垂直な4直線上にそれぞれ3個ずつ格子点があり，ここから5点を選ぶ．このとき，4直線のうちの1本からは2個，他の直線からは1個ずつ選ぶ．

2個の格子点を含む直線の選び方は，　${}_4\mathrm{C}_1=4$ (通り)．

その直線上の格子点の選び方が，　${}_3\mathrm{C}_2=3$ (通り)．

他の3直線からそれぞれ1個ずつ格子点を選ぶ方法が $3^3=27$ 通りあるが，このうちの $2^3=8$ 通りの選び方は (b) の場合と重複する．

以上から，(c) を満たす5点の選び方は，

$$8\times 4\times 3\times(27-8)=1824\ (\text{通り}).$$

(a)，(b)，(c) より，求める選び方は，

$$4368-(288+1824+1824)=\mathbf{432}\ (\text{通り}).\qquad\cdots(\text{答})$$

第 3 問

(1)

$$C : y = x^2 - 2x + 4 \quad (x \geqq 0)$$
$$= (x-1)^2 + 3.$$

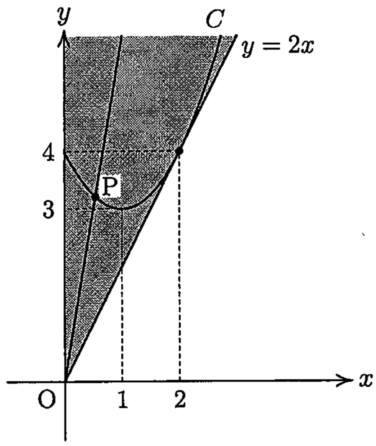
直線 $y = mx$ $(m > 0)$ が C と接するときの m とその接点の x 座標を調べる.

$$x^2 - 2x + 4 = mx.$$
$$x^2 - (m+2)x + 4 = 0.$$
$$(\text{判別式}) = (m+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

$m + 2 > 0$ より,

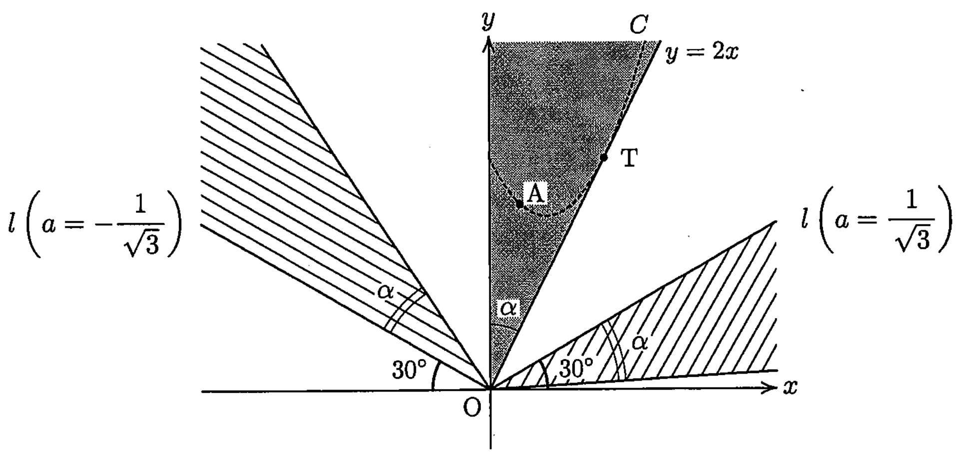
$$m + 2 = 4.$$
$$m = 2 \quad (\text{重解は } x = 2).$$

よって, P が C 上を動くとき, 半直線 OP が通過する領域は次図の灰色部分 (境界含む).



…(答)

(2)



第 3 問 (つづき 1)

$\mathrm{OA}=0$ となることはないので，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるように A, B をとれるための条件は，

$$l \text{ が半直線 OA と } 60^\circ \text{ の角をなすこと} \qquad \cdots(*)$$

である．

まず，A が y 軸上にあるとき，$(*)$ を満たすような l は，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に対応するものとなる．そこで，y 軸と直線 $y=2x$ のなす鋭角を α とする．

A が C 上を動くとき，半直線 OA は，(1) で求めた領域内を通過するので，$(*)$ を満たす l の可動範囲は，l の x 軸の正の方向から計った角度 θ について，

$$30^\circ-\alpha \leqq \theta \leqq 30^\circ \quad \text{または} \quad 150^\circ-\alpha \leqq \theta \leqq 150^\circ$$

となる ((2) の冒頭の図における斜線部分)．ここで，

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}$$

より，

$$\tan(30^\circ-\alpha)=\frac{\tan 30^\circ-\tan\alpha}{1+\tan 30^\circ\tan\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}=\frac{-8+5\sqrt{3}}{11},$$

$$\tan(150^\circ-\alpha)=\frac{\tan 150^\circ-\tan\alpha}{1+\tan 150^\circ\tan\alpha}=\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}=-\frac{8+5\sqrt{3}}{11}.$$

よって，求める a の範囲は，

$$-\frac{8+5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{-8+5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 3 問 (つづき 2)

【(2) の別解】

3 点 O, A, B が正三角形の頂点になるのは，点 A を点 O の周りに $\pm\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が点 B に一致するときである．よって，点 A が C 上を動くとき，点 B の軌跡は，C を $\pm\frac{\pi}{3}$ だけ回転した曲線になる．

点 $(0,4)$ を $\frac{\pi}{3}$ 回転した点を Q_1，$-\frac{\pi}{3}$ 回転した点を Q_2 とすると，

$$Q_1(-2\sqrt{3},2),\quad Q_2(2\sqrt{3},2)$$

であり，$T(2,4)$ を $\frac{\pi}{3}$ 回転した点を R_1，$-\frac{\pi}{3}$ 回転した点を R_2 とする．

線分 OT の中点を M とすると，$M(1,2)$ であり，$\overrightarrow{MR_1}, \overrightarrow{MR_2}$ は，$\overrightarrow{OT}$ を $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ だけ回転して $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍したものであるから，

$$\overrightarrow{OR_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MR_1}=(1,2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(-4,2)=(1-2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{OR_2}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MR_2}=(1,2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(4,-2)=(1+2\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}).$$

つまり，$R_1(1-2\sqrt{3},2+\sqrt{3})$,　$R_2(1+2\sqrt{3},2-\sqrt{3})$.

よって，$l: y=ax$ が各点 Q_1, R_1, Q_2, R_2 を通るときの a は次のようになる．

$$Q_1:\quad a=\frac{2}{-2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$R_1:\quad a=\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=-\frac{8+5\sqrt{3}}{11},$$

$$Q_2:\quad a=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$R_2:\quad a=\frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}=\frac{-8+5\sqrt{3}}{11}.$$

よって，求める a の範囲は，

$$-\frac{8+5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{-8+5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(答)$$

第４問

(1)　n 個の整数

$$2^m \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \qquad \cdots\cdots ①$$

から異なる２個を選んでそれらの積をとるとき，選んだ２個の小さい方が $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{n-2}$ のどれになるかで分類して $a_{n,\,2}$ を求めると，

$$\begin{aligned} a_{n,\,2} &= 2^0\cdot 2^1+2^0\cdot 2^2+2^0\cdot 2^3+\cdots+2^0\cdot 2^{n-1}\\ &\qquad +2^1\cdot 2^2+2^1\cdot 2^3+\cdots+2^1\cdot 2^{n-1}\\ &\qquad\qquad +2^2\cdot 2^3+\cdots+2^2\cdot 2^{n-1}\\ &\qquad\qquad\qquad \vdots\\ &\qquad\qquad\qquad +2^{n-2}\cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

となる．そこで，選んだ２個の小さい方が 2^k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2)$ であるようなものの積の総和だけを求めると，

$$2^k\cdot 2^{k+1}+2^k\cdot 2^{k+2}+\cdots+2^k\cdot 2^{n-1}=\frac{2^k\cdot 2^{k+1}(2^{n-k-1}-1)}{2-1}=2^{n+k}-2^{2k+1}$$

であるから，この結果で $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$ についての和をとって，

$$\begin{aligned} a_{n,\,2} &= \sum_{k=0}^{n-2}\left(2^{n+k}-2^{2k+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-2}2^n\cdot 2^k-\sum_{k=0}^{n-2}2\cdot 4^k\\ &= \frac{2^n(2^{n-1}-1)}{2-1}-\frac{2(4^{n-1}-1)}{4-1}\\ &= 2^n(2^{n-1}-1)-\frac{2}{3}(2^{n-1}+1)(2^{n-1}-1)\\ &= \frac{2}{3}(2^{n-1}-1)(2^n-1)\,. \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)　x の多項式

$$(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)$$

を展開することを考える．その k 次 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の項は

$$2^0x,\ 2^1x,\ 2^2x,\ \cdots,\ 2^{n-1}x$$

の中から異なる k 個を選んでそれらの積を作り，得られたすべての積について和をとったものになるから，x^k の係数は $a_{n,\,k}$ に一致する．なお，定数項は１である．

すなわち，

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1+a_{n,\,1}x^1+a_{n,\,2}x^2+\cdots+a_{n,\,n}x^n\\ &= (1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x) \end{aligned}$$

であり，同様に

$$f_{n+1}(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$$

第4問（つづき1）

であるから，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)}{(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)}=1+2^nx \qquad \cdots\cdots(答)$$

のように1次式になる．

また，

$$\begin{aligned}f_n(2x)&=(1+2^0\cdot 2x)(1+2^1\cdot 2x)(1+2^2\cdot 2x)\cdots(1+2^{n-1}\cdot 2x)\\&=(1+2^1x)(1+2^2x)(1+2^3x)\cdots(1+2^nx)\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=\frac{(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)}{(1+2^1x)(1+2^2x)(1+2^3x)\cdots(1+2^nx)}=1+x \qquad \cdots\cdots(答)$$

のように，これも1次式になる．

(3)　$1\leqq k\leqq n-1$ のとき，$f_n(x)$, $f_n(2x)$, $f_{n+1}(x)$ における各項の係数は次の表のようになる．

	x^k の係数	x^{k+1} の係数	
$f_n(x)$	$a_{n,\,k}$	$a_{n,\,k+1}$	（ア）
$f_n(2x)$	$2^k\,a_{n,\,k}$	$2^{k+1}\,a_{n,\,k+1}$	（イ）
$f_{n+1}(x)$	（不要）	$a_{n+1,\,k+1}$	（ウ）

(2) の結果より $f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)$ であるから，両辺の x^{k+1} $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の係数を比べると，展開するときに $1+2^nx$ の 2^n を掛けることと（ア），（ウ）の段に注意して，

$$a_{n+1,\,k+1}=2^n\,a_{n,\,k}+a_{n,\,k+1}\ . \qquad \cdots\cdots②$$

また，(2) の結果より $f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)$ であるから，両辺の x^{k+1} $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の係数を比べると，（イ），（ウ）の段に注意して，

$$a_{n+1,\,k+1}=2^k\,a_{n,\,k}+2^{k+1}\,a_{n,\,k+1}\ . \qquad \cdots\cdots③$$

$2^{k+1}\times$②$-$③ により $a_{n,\,k+1}$ を消去して，

$$(2^{k+1}-1)\,a_{n+1,\,k+1}=(2^{k+1}\cdot 2^n-2^k)\,a_{n,\,k}\ .$$

$$\frac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}\ .$$

$k=n$ のときは，$f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)$ において両辺の x^{n+1} の係数を比べることで $a_{n+1,\,n+1}=2^n\,a_{n,\,n}$ を得るから，

$$\frac{a_{n+1,\,n+1}}{a_{n,\,n}}=2^n\ ,\qquad \frac{2^n(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}-1}=2^n$$

である．結局，$1\leqq k\leqq n$ において

$$\frac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

第4問（つづき2）

【(2) の別解】

$n+1$ 個の整数

$$2^m \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n) \qquad \cdots\cdots ④$$

から異なる $k+1$ 個を選んでそれらの積をとることを考えると，$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，

- 選んだ $k+1$ 個で最も大きいものが 2^n であるとき．
  残り k 個は①から選ぶので，このときの $k+1$ 個の積の総和は $2^n a_{n,k}$ である．
- 選んだ $k+1$ 個で最も大きいものが 2^n 以外であるとき．
  ①から $k+1$ 個を選んで積をとるから，このときの $k+1$ 個の積の総和は $a_{n,k+1}$ である．

よって，④から異なる $k+1$ 個を選んでそれらの積をとるとき，積の総和 $a_{n+1,k+1}$ について

$$a_{n+1,k+1} = 2^n a_{n,k} + a_{n,k+1} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．ただし，$k=0$ のときは

$$a_{n+1,1} = (2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})+2^n = a_{n,1}+2^n$$

であるから，$a_{n,0}=1$ と定義すれば，②は $0 \leqq k \leqq n-1$ において成り立つ．

さらに，

$$a_{n+1,n+1} = (2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdots 2^{n-1})\cdot 2^n = 2^n a_{n,n}$$

であることにも注意すると，

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= 1+\sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k+1}x^{k+1}\\
&= 1+\sum_{k=0}^{n-1} a_{n+1,k+1}x^{k+1} + a_{n+1,n+1}x^{n+1}\\
&= 1+\sum_{k=0}^{n-1}(2^n a_{n,k}+a_{n,k+1})x^{k+1} + a_{n+1,n+1}x^{n+1} \quad (②より)\\
&= 1+2^n x\sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}x^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k+1}x^{k+1} + a_{n+1,n+1}x^{n+1}\\
&= 1+2^n x\sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}x^k + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}x^k + 2^n a_{n,n}x^{n+1}\\
&= 1+2^n x\{f_n(x)-a_{n,n}x^n\}+\{f_n(x)-1\}+2^n x\,a_{n,n}x^n\\
&= (1+2^n x)f_n(x)
\end{aligned}$$

となるから，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1+2^n x\,. \qquad \cdots\cdots (答)$$

第4問（つづき3）

次に，$n+1$ 個の整数④から異なる $k+1$ 個を選んでそれらの積をとることを再び考えると，$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，

- 選んだ $k+1$ 個で最も小さいものが 2^0 であるとき．
  残り k 個それぞれは 2^1 で括れ，k 個の積は 2^k で括れるので，①から k 個を選んで積をとり，それに 2^k を掛けたと考えれば，$k+1$ 個の積の総和は $2^k a_{n,k}$ である．
- 選んだ $k+1$ 個で最も小さいものが 2^0 以外であるとき．
  $k+1$ 個それぞれは 2^1 で括れ，$k+1$ 個の積は 2^{k+1} で括れるので，①から $k+1$ 個を選んで積をとり，それに 2^{k+1} を掛けたと考えれば，$k+1$ 個の積の総和は $2^{k+1} a_{n,k+1}$ である．

よって，④から異なる $k+1$ 個を選んでそれらの積をとるとき，積の総和 $a_{n+1,k+1}$ について

$$a_{n+1,k+1} = 2^k a_{n,k} + 2^{k+1} a_{n,k+1} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．ただし，$k=0$ のときは

$$\begin{aligned} a_{n+1,1} &= 2^0 + (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) \\ &= 2^0 + 2(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 1 + 2a_{n,1} \end{aligned}$$

であるから，$a_{n,0} = 1$ と定義すれば，③は $0 \leqq k \leqq n-1$ において成り立つ．

③および $a_{n+1,n+1} = 2^n a_{n,n}$ より

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 1 + \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k+1} x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n+1,k+1} x^{k+1} + a_{n+1,n+1} x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^k a_{n,k} + 2^{k+1} a_{n,k+1}\right) x^{k+1} + a_{n+1,n+1} x^{n+1} \\ &= 1 + x \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} (2x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k+1} (2x)^{k+1} + a_{n+1,n+1} x^{n+1} \\ &= 1 + x \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} (2x)^k + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} (2x)^k + 2^n a_{n,n} x^{n+1} \\ &= 1 + x \{f_n(2x) - a_{n,n}(2x)^n\} + \{f_n(2x) - 1\} + x\, a_{n,n} (2x)^n \\ &= (1+x) f_n(2x) \end{aligned}$$

となるから，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = 1 + x\ . \qquad \cdots\cdots(答)$$

第4問（つづき4）

【(3) の別解】

$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，$2^{k+1} \times$ ② $-$ ③ により $a_{n,\,k+1}$ を消去して，

$$(2^{k+1}-1)\,a_{n+1,\,k+1} = (2^{k+1}\cdot 2^n - 2^k)\,a_{n,\,k}\,.$$

$$\frac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}} = \frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}\,.$$

$k=n$ のときは，$a_{n+1,\,n+1} = 2^n\,a_{n,\,n}$ より

$$\frac{a_{n+1,\,n+1}}{a_{n,\,n}} = 2^n\,,\quad \frac{2^n(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}-1} = 2^n$$

であるから，$1 \leqq k \leqq n$ において

$$\frac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}} = \frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．