第１問

$ax^2+bx+c>0$　…①

$bx^2+cx+a>0$　…②

$cx^2+ax+b>0$　…③

（１）　$a<0$ とすると，

$$\lim_{x\to\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to\infty}ax^2\left(1+\frac{b}{ax}+\frac{c}{ax^2}\right)=-\infty\ .$$

よって，いかなる p に対しても，$x>p$ を満たす x で ① を満たさないものがあるので，①，②，③をすべて満たす x の集合が $x>p$ にはなり得ない．したがって，$a\geqq 0$．

同様に，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$．　　　　（証明終り）

（２）　a,b,c の中に 0 がないとすると，（１）より a,b,c はすべて正．このとき，

$$\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to-\infty}ax^2\left(1+\frac{b}{ax}+\frac{c}{ax^2}\right)=\infty\ .$$

$$\lim_{x\to-\infty}(bx^2+cx+a)=\lim_{x\to-\infty}bx^2\left(1+\frac{c}{bx}+\frac{a}{bx^2}\right)=\infty\ .$$

$$\lim_{x\to-\infty}(cx^2+ax+b)=\lim_{x\to-\infty}cx^2\left(1+\frac{a}{cx}+\frac{b}{cx^2}\right)=\infty\ .$$

となるので，いかなる p に対しても，$x>p$ を満たさない x で ①，②，③ をすべて満たすものがある．よって，①，②，③をすべて満たす x の集合が $x>p$ にはなり得ない．

したがって，a,b,c のうち少なくとも 1 個は 0 である．　　　　（証明終り）

（３）　（１），（２）から，a,b,c の少なくとも 1 つは 0 であり，0 でないものは正である．そこで，0 の個数で分類する．

・0 が 3 個のとき，①，②，③を同時に満たす x は存在しないので不適．

・0 が 2 個のとき，$a=b=0$, $c>0$ の場合を考えればよくて，このとき①，②，③は，

$c>0$，$cx>0$，$cx^2>0$

となり，これらを満たす x は，$x>0$．

・0 が 1 個のとき．$a=0$, $b>0$, $c>0$ の場合を考えればよくて，このとき①，②，③は，

$bx+c>0$，$bx^2+cx>0$，$cx^2+b>0$

となる．第 3 式は常に成り立ち，第 2 式は $x(bx+c)>0$ となるので，第 1 式と合わせて，これらを満たす x は，$x>0$．

以上より，①，②，③を満たす x の集合は $x>0$，つまり $p=0$．　　　　（証明終り）

第１問（つづき）

【（３）の別解】

$a=b=c=0$ とすると, ①, ②, ③を満たす x は存在しないので不適.

よって, （１）より, a,b,c のうち少なくとも 1 つは正であり, 負のものはないので, $x>0$ に対して, ①, ②, ③は成り立つ.

したがって, $x>0$ を満たす x は $x>p$ に含まれる．よって, $p \leqq 0$.

一方（２）より a,b,c のどれかは 0 なので, $x=0$ が, ①, ②, ③のうち少なくとも 1 つを満たさない.

よって, $x=0$ は $x>p$ を満たさないので, $p \geqq 0$.

以上より, $p=0$.　　　　（証明終り）

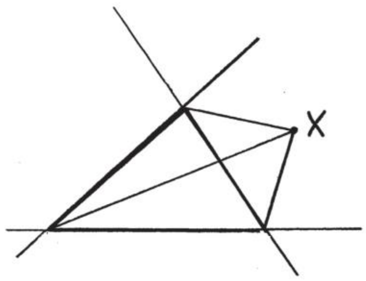
第２問

［解答 1］

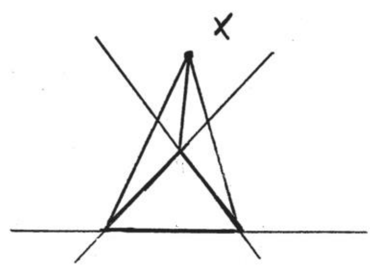
$f(\mathrm{X}) = \triangle\mathrm{ABX} + \triangle\mathrm{BCX} + \triangle\mathrm{CAX}$ とおく。X が三角形 ABC の内部または周上のときは，$f(\mathrm{X}) = \triangle\mathrm{ABC} = 1$ となるから，条件式を満たす点 X は三角形 ABC の外部にある。

次の 2 つのタイプに分かれる。

（ア）

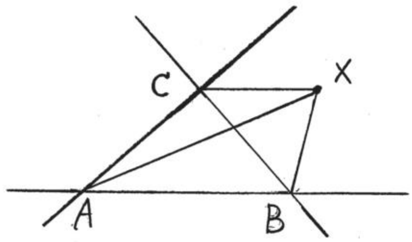


（イ）



(ア) のタイプのとき。

右図で考える。$f(\mathrm{X}) = \triangle\mathrm{ABC} + 2\triangle\mathrm{BCX}$ となるので，条件式から，



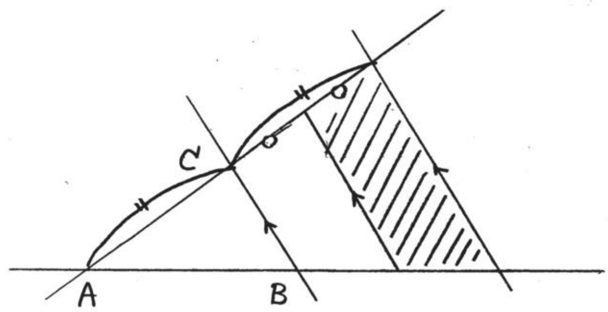
$$2\triangle\mathrm{ABC} \leqq \triangle\mathrm{ABC} + 2\triangle\mathrm{BCX} \leqq 3\triangle\mathrm{ABC}$$

$$\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC} \leqq \triangle\mathrm{BCX} \leqq \triangle\mathrm{ABC}$$

ここで，三角形 ABC と三角形 BCX において，BC を底辺とみたときの高さを考えると，

$\dfrac{1}{2}$(A と BC の距離) ≦ (X と BC の距離) ≦ (A と BC の距離)

よって，X の動く範囲は，次の図のように 2 つの平行線で挟まれた領域となる。

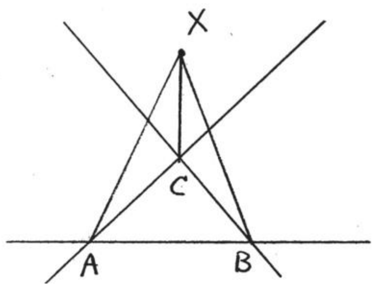


(イ) のタイプのとき。

右図で考える。

$$f(\mathrm{X}) = \triangle\mathrm{ABX} + (\triangle\mathrm{ABX} - \triangle\mathrm{ABC}) = 2\triangle\mathrm{ABX} - \triangle\mathrm{ABC}$$

となるので，条件式から，



$$2\triangle\mathrm{ABC} \leqq 2\triangle\mathrm{ABX} - \triangle\mathrm{ABC} \leqq 3\triangle\mathrm{ABC}$$

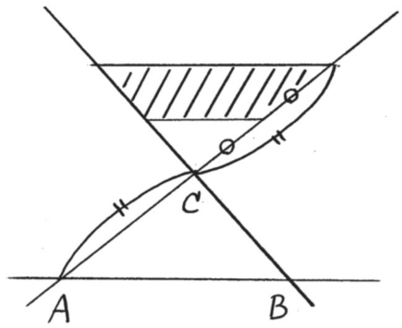
$$\frac{3}{2}\triangle\mathrm{ABC} \leqq \triangle\mathrm{ABX} \leqq 2\triangle\mathrm{ABC}$$

第２問（つづき 1）

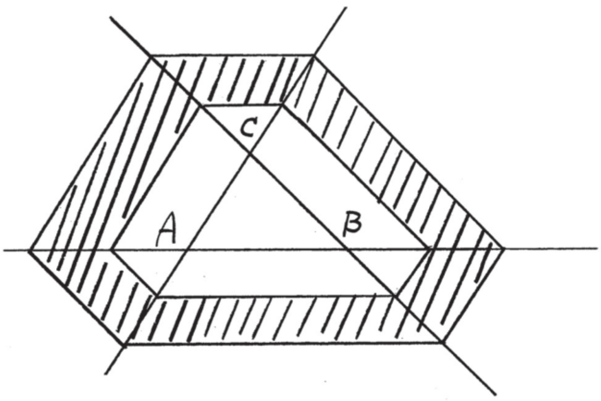
(ア) と同様に，AB を底辺とみると，

$$\frac{3}{2}(\text{C と AB の距離}) \leqq (\text{X と AB の距離}) \leqq 2(\text{C と AB の距離})$$

よって，X の動く範囲は，次の図のように 2 つの平行線で挟まれた領域となる。



(ア) のタイプが 3 通り，(イ) のタイプも 3 通りあるから，まとめると次の図のようになる。



(ア) のタイプの領域は，三角形 ABC を A を中心として 2 倍に相似拡大したものから，三角形 ABC を A を中心として $\frac{3}{2}$ 倍に相似拡大したものを除いた領域になるから，その面積 S_1 は，

$$S_1 = 2^2 \triangle\text{ABC} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \triangle\text{ABC} = \frac{7}{4}\triangle\text{ABC}$$

(イ) のタイプの領域は，三角形 ABC と合同な三角形から，三角形 ABC を A を中心として $\frac{1}{2}$ 倍に相似拡大したものを除いた領域になるから，その面積 S_2 は，

$$S_2 = \triangle\text{ABC} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \triangle\text{ABC} = \frac{3}{4}\triangle\text{ABC}$$

$\triangle\text{ABC} = 1$ であるから，両者を合わせると，求める面積 S は，

$$S = 3S_1 + 3S_2 = \frac{15}{2}\triangle\text{ABC} = \frac{15}{2}$$

…(答)

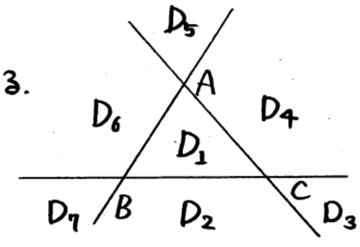
第２問（つづき 2）

［解答 2］

上の解答をベクトルを用いて表現すると次のようになる。

$S = \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX$ とする。

平面を右図の7つの領域 $D_1 \sim D_7$ に分割する。



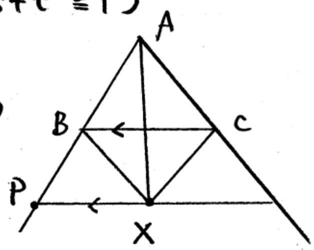
1°) $X \in D_1$ のとき。

$S = \triangle ABC = 1$ より不適

2°) $X \in D_2$ のとき。

$\overrightarrow{AX} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$　$(s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ s+t \geqq 1)$

とかける。



$S = \triangle ABC + 2\triangle BCX = 1 + 2\triangle BCX$　―①

点Xを通りBCに平行な直線と直線ABの交点をPとすると、

$\overrightarrow{AP} = (s+t)\overrightarrow{AB}$

である。$BC /\!/ XP$ より　$\triangle BCX = \triangle BCP = (s+t-1)\triangle ABC = s+t-1.$

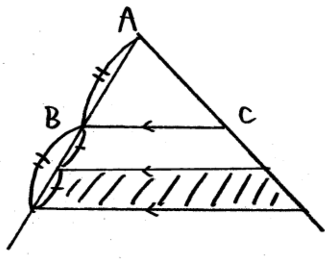
①より　$S = 1 + 2(s+t-1) = 2(s+t) - 1$

ゆえに　$2 \leqq S \leqq 3 \iff \frac{3}{2} \leqq s+t \leqq 2$

これをみたす点X全体は右図の斜線部である。

ゆえに、この領域の面積は

$\left\{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} \times \triangle ABC = \frac{7}{4}$



である。

$X \in D_4$，$X \in D_6$ のときも同様である。

3°) $X \in D_5$ のとき。

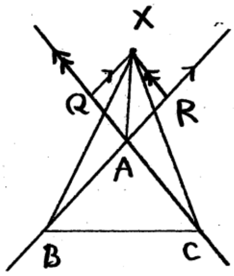
$\overrightarrow{AX} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$　$(s \leqq 0,\ t \leqq 0)$

とかける。

$S = \triangle ABC + 2 \times (\triangle ABX + \triangle CAX)$　―②

第２問（つづき 3）

点 X を通り AB に平行な直線と直線 AC の交点を Q、点 X を通り AC に平行な直線 AB の交点を R とすると



$$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AR} = s\overrightarrow{AB}$$

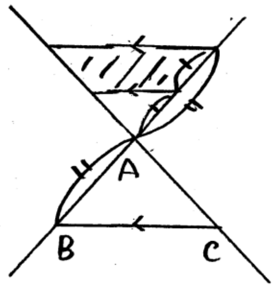
である。$AB \parallel XQ$, $AC \parallel XR$ より

$$\triangle ABX = \triangle ABQ = |t| \times \triangle ABC = -t, \quad \triangle CAX = -s$$

となる。ゆえに ② より $S = 1 - 2(s+t)$

よって、$2 \leqq S \leqq 3 \iff -1 \leqq s+t \leqq -\frac{1}{2}$

これをみたす点 X 全体は右図の斜線部である。



ゆえに、この領域の面積は

$$\left\{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \times \triangle ABC = \frac{3}{4}$$

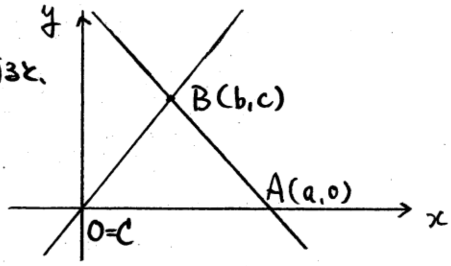
である。

$X \in D_7$, $X \in D_3$ のときも同様である。

以上により、求める領域の面積は

$$3 \times \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{15}{2} \qquad \cdots(答)$$

注）たとえば右図のように座標軸を導入すると、点 X の座標を (x, y) とすれば、



$$\triangle ABX = \frac{1}{2}\left|(a-x)(c-y) - (-y)(b-x)\right|$$

$$\triangle BCX = \frac{1}{2}\left|(b-x)(-y) - (-x)(c-y)\right|$$

$$\triangle CAX = \frac{1}{2}\left|(-y)(a-x) - (-x)(-y)\right|$$

と表せる。これから $2 \leqq S \leqq 3$ となるための x, y に関する必要十分条件を求めることでも同様の結果を得ることができる。

第３問

(1) $-1 < t \leqq 1$ において

$$\frac{y(t)}{x(t)} = 3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 3\sqrt{\frac{2}{1+t}-1}$$

であり，これは t について減少する。　　（証明終り）

(2) $f(t) = \sqrt{\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2} = \sqrt{2}\,(t+1)\sqrt{5-4t}$

であるから

$$f'(t) = \sqrt{2}\left\{1\cdot\sqrt{5-4t} + (t+1)\frac{-2}{\sqrt{5-4t}}\right\}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}\,(1-2t)}{\sqrt{5-4t}}.$$

よって $f(t)$ の増減は右のようになり，$f(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ をとる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

…（答）

(3). まず C の概形を描く．

$-1 \leqq t \leqq 1$ で $x(t) = (1+t)^{\frac{3}{2}}$ は増加する。

また $-1 < t < 1$ で $\frac{d}{dt}y(t) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1-3t}{\sqrt{1-t}}$

である。よって P の動きは次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
P	$(0,0)$	$\nearrow$	$\left(\frac{8\sqrt{3}}{9}, \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$	$\searrow$	$(2\sqrt{2}, 0)$

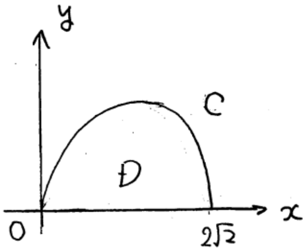


図１

さらに，(1)より直線 OP の傾きは減少する．

よって C，D の概形は右図１のようになる．

第3問（つづき1）

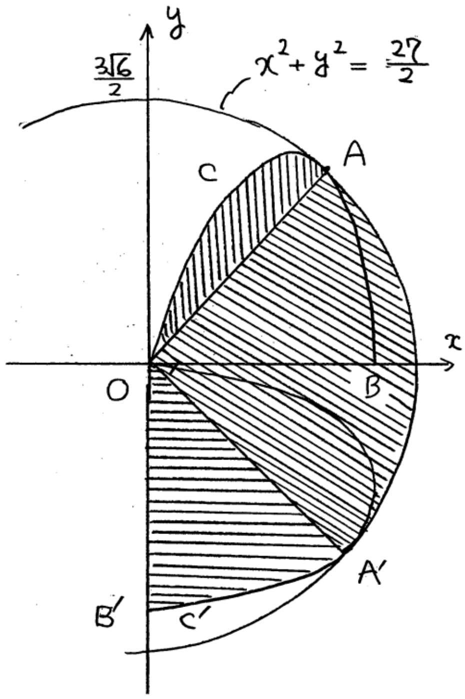


図2

C上で $t=\frac{1}{2}$, 1 に対応する点をそれぞれA, Bとする。またA, Bを原点中心に $-90°$ 回転した点をA′, B′とし、Cを原点中心に $-90°$ 回転した曲線をC′とする。

Dが通過する領域は右図2の斜線部である。

このうち、円 $x^2+y^2=\frac{27}{2}$ と2つの線分OA, OA′で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{4}\times\frac{27}{2}\pi=\frac{27}{8}\pi.$$

線分OAとCで囲まれた領域の面積を S_2、線分OA′, OB′とC′で囲まれた領域の面積を S_3 とすると、S_2+S_3 は Dの面積に等しい。

そこでDの面積 S_4 について

$$S_4=\int_0^{2\sqrt{2}}y\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\sqrt{1-t^2}+t\sqrt{1-t^2}\right\}dt.$$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は原点を中心とする半径1の半円の面積に等しく $\frac{\pi}{2}$.

$t\sqrt{1-t^2}$ は奇関数であるから $\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=0$.

よって $S_4=\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$.

以上より、求める面積は

$$S_1+S_4=\frac{45}{8}\pi.$$

…（答）

第４問

(1) $a_{n,2}=\dfrac{1}{2}\left\{(2^0+2^1+\cdots\cdots+2^{n-1})^2-(2^0\cdot2^0+2^1\cdot2^1+\cdots\cdots+2^{n-1}\cdot2^{n-1})\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(2^n-1)^2-(2^0+2^2+\cdots\cdots+2^{2(n-1)})\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(2^{2n}-2^{n+1}+1)-\dfrac{2^{2n}-1}{2^2-1}\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left\{2^{2n}-3\cdot2^n+2\right\}=\dfrac{(2^n-1)(2^n-2)}{3}$ ---(答)

(2) $(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots\cdots(1+2^{n-1}x)$

という多項式を考える。$1\leqq k\leqq n$ に対し、この多項式の k 次の項は、x、$2x$、2^2x、$\cdots$、$2^{n-1}x$ から異なる k 個を選んで、その積の和をとったものなので、その係数は $a_{n,k}$ と一致する。

このことと定数項が 1 であることを合わせて、上の多項式が $f_n(x)$ と一致することが分かる。

$f_n(x)=(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots\cdots(1+2^{n-1}x)$

$f_n(2x)=(1+2x)(1+2^2x)\cdots\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$

$f_{n+1}(x)=(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$

より、$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx$、$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$ ---(答)

(3) $1\leqq k\leqq n$ に対し、$f_{n+1}(x)$ の $k+1$ 次の係数が $a_{n+1,k+1}$、

$f_n(x)$ の k、$k+1$ 次の係数がそれぞれ $a_{n,k}$、$a_{n,k+1}$

$f_n(2x)$ の k、$k+1$ 次の係数がそれぞれ $2^ka_{n,k}$、$2^{k+1}a_{n,k+1}$ である。ただし、$a_{n,n+1}=0$ とする。

これと(2)より $f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)$、$f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)$ となり、$k+1$ 次の係数を比較して、

$$\begin{cases}a_{n+1,k+1}=2^na_{n,k}+a_{n,k+1} & \cdots① \\ a_{n+1,k+1}=2^ka_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1} & \cdots②\end{cases}$$

を得る。①$\times2^{k+1}-$②より $(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+k+1}-2^k)a_{n,k}$

となり、$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\dfrac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$ ---(答)

第４問（つづき１）

［参考］

例として，4 個の文字 a, b, c, d に対して，x の多項式

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)$$

を考える。これを展開して，x について昇べきの順に書くと，

$$\begin{aligned}&(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)\\&\qquad= 1+(a+b+c+d)x+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\&\qquad\qquad+(abc+abd+acd+bcd)x^3+abcdx^4\end{aligned}$$

となる。ここで，x^k の係数は 4 文字 a, b, c, d から選んだ異なる k 個の積すべての和になっていることに注意する。

一般に，n 個の文字 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に対して，x の多項式

$$F(x)=(1+\alpha_1x)(1+\alpha_2x)\cdots(1+\alpha_nx)$$

を考える。これを展開したものを

$$F(x)=1+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n$$

とすると，x^k の係数 A_k は，n 個の文字 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ から選んだ異なる k 個の積を選び方すべてにわたって加えたものである。

本問の関数 $f_n(x)$ は，$\alpha_k=2^{k-1}$ の場合に以上の事柄を考えたものである。このように，数列をひとまとめにしたような関数のことを母関数という。身近な例としては，二項係数がある。

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^k$$

であるから，$(1+x)^n$ は数列 ${}_n\mathrm{C}_k$ の母関数になっている。

第４問（つづき 2）

((2)の参考)

正の整数 n に対して，集合 A_n を

$$A_n = \{2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$$

と定める．また，正の整数 n に対して，

$$a_{n,0} = 1, \quad a_{n,-1} = a_{n,n+1} = 0$$

と定める．

正の整数 n と $0 \leqq k \leqq n+1$ を満たす整数 k に対して，A_{n+1} から相異なる k 個の要素を選んで積を作るとき，その k 個の要素の中に 2^n が含まれるか否かで場合分けをしてその総和 $a_{n+1,k}$ を求める．

(i)　2^n を含まない場合．

A_n から相異なる k 個の要素を選んで積を作るので，その総和は $a_{n,k}$ である．

(ii)　2^n を含む場合．

A_n から相異なる $(k-1)$ 個の要素を選んだものと 2^n との積を作るので，その総和は $2^n a_{n,k-1}$ である．

以上(i), (ii)より，

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + 2^n a_{n,k-1} \quad (0 \leqq k \leqq n+1) \qquad \cdots(\sharp_1)$$

が成り立つ．

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$$

であるから，

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}x^k = \sum_{k=0}^{n+1} (a_{n,k} + 2^n a_{n,k-1})\,x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}x^k + 2^n x \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k-1}x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k + 2^n x \sum_{i=0}^{n} a_{n,i}x^i \\ &= (1 + 2^n x)\,f_n(x) \end{aligned}$$

となり，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(1+2^n x)\,f_n(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

また，正の整数 n と $0 \leqq k \leqq n+1$ を満たす整数 k に対して，A_{n+1} から相異なる k 個の要素を選んで積を作るとき，その k 個の要素の中に 2^0 が含まれるか否かで場合分けをしてその総和 $a_{n+1,k}$ を求める．

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \{2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{n-1}, 2^n\} \\ &= \{2^0, 2 \cdot 2^0, 2 \cdot 2^1, \cdots, 2 \cdot 2^{n-2}, 2 \cdot 2^{n-1}\} \end{aligned}$$

であることに注意する．

第４問（つづき 3）

(I)　2^0 を含まない場合．

A_{n+1} から 2^0 以外の相異なる k 個の要素を選んで積を作ることになるが，k 個の各要素から 2 を 1 つずつくくり出すと，その積は A_n から異なる k 個の要素を選んだものの積となっている．したがって，その総和は $2^k a_{n,k}$ である．

(II)　2^0 を含む場合．

2^0 を掛けても値は変わらないので，A_{n+1} から 2^0 以外の相異なる $(k-1)$ 個の要素を選んで積を作ったものの総和である．$(k-1)$ 個の各要素から 2 を 1 つずつくくり出すと，その積は A_n から異なる $(k-1)$ 個の要素を選んだものの積となっている．したがって，その総和は $2^{k-1}a_{n,k-1}$ である．

以上(I), (II)より，

$$a_{n+1,k} = 2^k a_{n,k} + 2^{k-1}a_{n,k-1} \quad (0 \leqq k \leqq n+1) \qquad \cdots(\sharp_2)$$

が成り立つ．

$$f_n(2x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(2x)^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{n,k}x^k$$

であるから，

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}x^k = \sum_{k=0}^{n+1}\left(2^k a_{n,k} + 2^{k-1}a_{n,k-1}\right)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}(2x)^k + x\sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k-1}(2x)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(2x)^k + x\sum_{i=0}^{n} a_{n,i}(2x)^i \\ &= (1+x)\,f_n(2x) \end{aligned}$$

となり，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = \frac{(1+x)\,f_n(2x)}{f_n(2x)} = 1+x \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

(注)

$(\sharp_1)$ と $(\sharp_2)$ より $a_{n,k}$ を消去することにより，

$$\frac{a_{n+1,k}}{a_{n,k-1}} = \frac{2^{k-1}\left(2^{n+1}-1\right)}{2^k - 1}$$

となり，これより(3)の

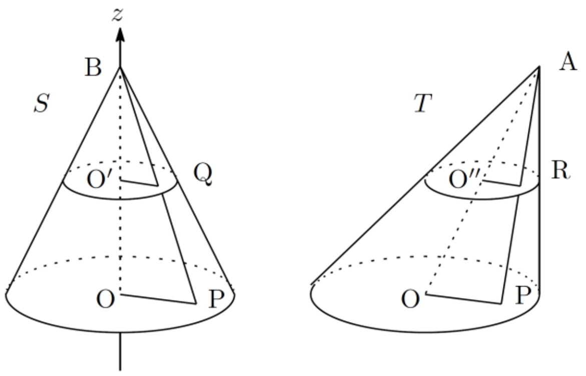
$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{2^k\left(2^{n+1}-1\right)}{2^{k+1}-1}$$

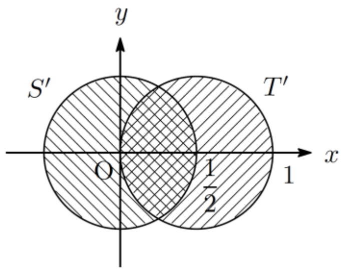
を得ることもできる．

第５問

$(0,0,0)$, $(0,0,2)$ を順に O, B とおく．

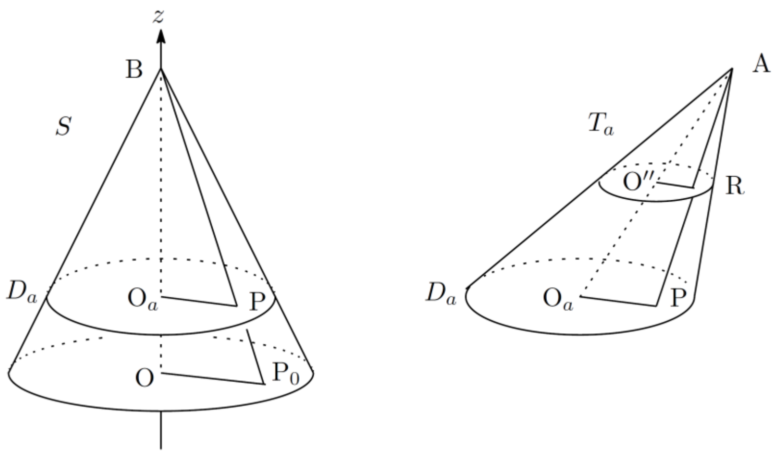
(1)　BO と $z=1$ の交点 $(0,0,1)$ を O', BP と $z=1$ の交点を Q とおく．Q の存在する範囲が S の $z=1$ による切り口である．三角形 BOP と三角形 $\mathrm{BO'Q}$ は相似であり，相似比は $2:1$ である．
$\mathrm{OP} \leqq 1$ より $\mathrm{O'Q} \leqq \dfrac{1}{2}$ となり，Q は $z=1$ 上の O' を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く．
AO と $z=1$ の交点 $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$ を O'',
AP と $z=1$ の交点を R とおく．
R の存在する範囲が T の $z=1$ による切り口である．三角形 AOP と三角形 $\mathrm{AO''R}$ は相似であり，相似比は $2:1$ である．
$\mathrm{OP} \leqq 1$ より $\mathrm{O''R} \leqq \dfrac{1}{2}$ となり，
R は $z=1$ 上の O'' を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く．
S の $z=1$ による切り口を S',
T の $z=1$ による切り口を T' とおくと，
答えは図斜線部である．境界を含む．





$\cdots$ (答)

(2)　線分 AP が通過する部分を K とおく．K を $z=z_0$ で切った切り口を考える．
P の z 座標が a　$(0 \leqq a < 2)$ の場合に制限して考えると，切り口が存在するのは，$0 \leqq a \leqq z_0\,(\leqq 2)$ のときである．
まず，S を $z=a$ で切った切り口 D_a を求める．



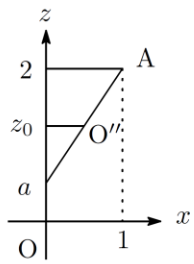
BO と $z=a$ の交点 $(0,0,a)$ を O_a, 直線 BP と $z=0$ の交点を P_0 とおく．

第５問（つづき 1）

三角形 BOP_0 と三角形 $\mathrm{BO}_a\mathrm{P}$ は相似であり, 相似比は $2:2-a$ である. $\mathrm{OP}_0 \leqq 1$ より $\mathrm{O}_a\mathrm{P} \leqq \dfrac{2-a}{2}$ となり, P は $z=a$ 上の O_a を中心とする半径 $\dfrac{2-a}{2}$ の円を描く. 式で表すと,

$$D_a : x^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-a}{2}\right)^2, \quad z=a \qquad \cdots ①$$

となる.



点 P が D_a 上を動くとき, 線分 AP が通過する部分を T_a とおく.

T_a を平面 $z=z_0$ $(a \leqq z_0 \leqq 2)$ で切った切り口を求める.

AO_a と $z=z_0$ の交点を, 改めて O″ とおく. O″ の座標は, 図の直角三角形の相似より $\left(\dfrac{z_0-a}{2-a}, 0, z_0\right)$ となる.

AP と $z=z_0$ の交点を, 改めて R とおく. R の存在する範囲が T_a の $z=z_0$ による切り口である.

三角形 $\mathrm{AO}_a\mathrm{P}$ と三角形 AO″R は相似であり, 相似比は $2-a:2-z_0$ である.

$\mathrm{O}_a\mathrm{P} \leqq \dfrac{2-a}{2}$ より $\mathrm{O''R} \leqq \dfrac{2-z_0}{2}$ となり, R は $z=z_0$ 上の O″ を中心とする半径 $\dfrac{2-z_0}{2}$ の円を描く.

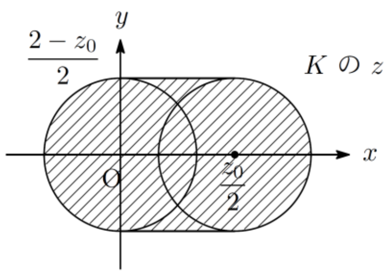
式で表すと,

$$\left(x-\frac{z_0-a}{2-a}\right)^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-z_0}{2}\right)^2, \quad z=z_0 \qquad \cdots ②$$

となる.

a を 0 から z_0 まで動かす. このとき, 円板 ② の半径は $\dfrac{2-z_0}{2}$ で一定である. 円板 ② の中心の x 座標は $\dfrac{z_0}{2}$ から 0 まで動く. この円板 ② が通過する部分が K を $z=z_0$ で切った切り口に他ならない.

切り口を図示すると下図斜線部となる.



この面積を $S(z_0)$ とおくと,

$$S(z_0) = \pi\left(\frac{2-z_0}{2}\right)^2 + \frac{z_0}{2}(2-z_0) = \frac{\pi}{4}(2-z_0)^2 + \frac{1}{2}z_0(2-z_0).$$

求める体積は

$$\begin{aligned}\int_0^2 S(z)\,dz &= \frac{\pi}{4}\int_0^2 (2-z)^2\,dz + \frac{1}{2}\int_0^2 z(2-z)\,dz \\ &= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{6} = \frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(\pi+1).\end{aligned} \qquad \cdots (答)$$

第５問（つづき２）

（注）(1)(2)で，切り口の図形を求める部分を，ベクトルで表現すると例えば次のようになる。記号等は，解答と同じものとする。

(1)　Pの座標を $(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$　$(0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

とすると，線分AP上の点Rは

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r\cos\theta - 1 \\ r\sin\theta \\ -2 \end{pmatrix} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

と表せる．Rが平面 $z=1$ 上の点となるのは，$t=\frac{1}{2}$ のときで，このとき

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{r}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，PがSの底面を動くとき，線分APと平面 $z=1$ との交点Rは，

中心 $O''\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$，半径 $\frac{1}{2}$ の円板

になる．これがTの平面 $z=1$ による切り口T′である．

よって，Sの平面 $z=1$ による切り口S′と合わせて解答の図を得る．

(2)　Sを平面 $z=a$ $(0 \leqq a < 2)$ で切った切り口の円板 D_a 上の点Pの座標を

$$P(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ a) \quad \left(0 \leqq r \leqq \frac{2-a}{2},\ 0 \leqq \theta < 2\pi\right)$$

とすると，線分AP上の点Rは

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r\cos\theta - 1 \\ r\sin\theta \\ a-2 \end{pmatrix} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

と表せる．Rが平面 $z=z_0$ $(a \leqq z_0 \leqq 2)$ 上の点となるのは，$2+t(a-2)=z_0$，すなわち，

$$t = \frac{2-z_0}{2-a}$$

のときで，このとき，

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + tr\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z_0-a}{2-a} \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{2-z_0}{2-a}\cdot r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，PがSと平面 $z=a$ の切り口の円板 D_a を動くとき，線分APと平面 $z=z_0$ との交点Rは，$0 \leqq \frac{2-z_0}{2-a}\cdot r \leqq \frac{2-z_0}{2}$ から，

第５問 (つづき 3)

中心 $O''\left(\dfrac{z_0-a}{2-a}, 0, z_0\right)$，半径 $\dfrac{2-z_0}{2}$ の円板 ②'

になる．ここで，a を 0 から z_0 まで動かして，解答の K を平面 $z=z_0$ で切った切り口の図を得る．

第６問

(1)

$$f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)\quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

とおくと，$A>1$ より

$$f(0)=-\sin\alpha,\qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)>0,\qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)<0,$$
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)<0,\qquad f(2\pi)=-\sin\alpha$$

である．$f(\theta)$ は連続関数であるから中間値の定理より

$$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4},\quad \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4},\quad \frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{7\pi}{4}$$

の各範囲に $f(\theta)=0$ となる θ が少なくとも 1 つ存在する．さらに，

$$\sin\alpha\geqq 0 \text{ なら } 0\leqq\theta<\frac{\pi}{4} \text{ の範囲に，}\quad \sin\alpha<0 \text{ なら } \frac{7\pi}{4}<\theta<2\pi \text{ の範囲に}$$

$f(\theta)=0$ となる θ が少なくとも 1 つ存在する．

以上より，θ の方程式 $f(\theta)=0$ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつ．　（証明終り）

(2)　C 上の点 Q の座標は $\left(\sqrt{2}c, s\right)$（ただし，$c=\cos\theta, s=\sin\theta, 0\leqq\theta<2\pi$）と表すことができて，Q における C の接線の方程式は，

$$\frac{\sqrt{2}c}{2}x+sy=1$$

である．したがって，Q を通りこの接線に垂直な直線の方程式は，

$$s\left(x-\sqrt{2}c\right)-\frac{\sqrt{2}c}{2}(y-s)=0\quad \text{すなわち}\quad \sqrt{2}sx-cy-sc=0$$

となる．

この直線が D 内の点 (a,b) を通る条件は，

$$\sqrt{2}a\sin\theta-b\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=0$$

である．

$(a,b)=(0,0)$ のときは，$\sin 2\theta=0$ となり，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲にこれを満たす θ は 4 個ある．

$(a,b)\neq(0,0)$ のときは，

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=-\frac{b}{\sqrt{2a^2+b^2}}\qquad\cdots(\sharp)$$

を満たす α を用いると，

$$\frac{1}{2\sqrt{2a^2+b^2}}\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0\qquad\cdots(*)$$

となる．

第6問（つづき1）

また，(a,b) が D 内の点であることより，

$$2a^2+b^2<r^2$$

を満たし，

$$\frac{1}{2\sqrt{2a^2+b^2}}>\frac{1}{2\sqrt{r^2}}=\frac{1}{2r}\quad (\because 0<r<1)$$

となる．したがって，$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たす r に対しては $\dfrac{1}{2\sqrt{2a^2+b^2}}>1$ となり，(1)より $(*)$ を満たす θ は少なくとも4個ある．

以上から，問題文の「条件」を満たす $r\,(0<r<1)$ が存在することになる．　(証明終り)

次に，$\dfrac{1}{2}<r<1$ ならば D 内の点として $2a^2+b^2=\dfrac{1}{4}$ を満たす (a,b) を取ることができる．この a,b に対して $(*)$ は，

$$\sin 2\theta=\sin(\theta+\alpha)$$
$$2\theta=\theta+\alpha+2m\pi,\pi-(\theta+\alpha)+2n\pi\quad（ただし，m,n は整数）$$
$$\theta=2m\pi+\alpha,\frac{(2n+1)\pi-\alpha}{3}$$

となるので，例えば $\alpha=\dfrac{\pi-\alpha}{3}$ すなわち $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $(\sharp)$ より $(a,b)=\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ であるが，このとき

$$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{12},\frac{19\pi}{12}$$

となり，$(*)$ を満たす θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に3個しかない．つまり，$\dfrac{1}{2}<r<1$ のときは問題文の「条件」を満たす r は存在しない．

以上より，求める最大値は，

$$r=\frac{1}{2}\qquad\cdots(答)$$

である．

第６問（つづき 2）

【参考】P の座標を三角関数で表す.

(2)　$\mathrm{P}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\beta, l\sin\beta\right)$ $(0 \leqq l < r, 0 \leqq \beta < 2\pi)$，$\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta\right)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおけ，Q での C の接線の方程式は,

$$\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2}x + (\sin\theta)y = 1$$

より，接線の方向ベクトルとして，$\left(\sqrt{2}\sin\theta, -\cos\theta\right)$ がある.

これより，Q での C の接線と直線 PQ が直交する条件は,

$$\left(\sqrt{2}\sin\theta, -\cos\theta\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cos\theta - \frac{l}{\sqrt{2}}\cos\beta, \sin\theta - l\sin\beta\right) = 0.$$

$$\sin\theta\cos\theta - l\sin\theta\cos\beta + l\cos\theta\sin\beta = 0 \quad \cdots①$$

であり，$l = 0$ のとき,

$$\sin\theta\cos\theta = 0 \text{ より } \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

であるから, 問題文の「条件」を満たす．また，$l > 0$ のとき，①より,

$$\frac{1}{2l}\sin 2\theta - \sin(\theta - \beta) = 0 \quad \cdots②$$

であり，$0 < r \leqq \frac{1}{2}$ のときに $0 < l < \frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2l} > 1$ であるから，(1)から， D 内のすべての点 P に対して，問題文の「条件」が成り立つ.　（証明終り）

ここで，$r > \frac{1}{2}$ のときは $\frac{1}{2l} = 1$ となる l が存在し，さらに②において $\beta = -\frac{\pi}{4}$ とすると,

$$\sin 2\theta - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\sin 2\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

より,

$$2\theta = \theta + \frac{\pi}{4} + 2m\pi, \pi - \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2n\pi. \quad (m, n : \text{整数})$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから,

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$$

となり，条件が成り立たない.

よって，求める最大値は,

$$\frac{1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$