I

〔1〕 ①は

$$3-2\left(\frac{2}{3}\right)^x-3\left(\frac{3}{2}\right)^x+2=a.$$

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\left(\frac{3}{2}\right)^x+a=5.$$

ここで，$X=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ とおくと，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right\}^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^{-1}=X^{-1}=\frac{1}{X}$$

と表されるので，①は

$$^{ア}\boxed{2}X+\frac{^{イ}\boxed{3}}{X}+a={}^{ウ}\boxed{5} \qquad \cdots\cdots②$$

と X を用いて表される．

$X>0$ のもとで，② は

$$2X^2+(a-5)X+3=0$$

と変形できる．$f(X)=2X^2+(a-5)X+3$ とおくと，

$$f(X)=2\left(X-\frac{5-a}{4}\right)^2+3-\frac{(a-5)^2}{2}.$$

ここで，$f(0)=3>0$ に注意すると，X についての方程式②が異なる２つの正の実数解をもつ条件は，放物線 $y=f(X)$ について，

軸が $X>0$ に存在し，かつ （頂点の y 座標）<0

を満たすことである．これより，a の条件として，

$$\frac{5-a}{4}>0,\quad 3-\frac{(a-5)^2}{2}<0$$

が得られ，これを解いて，$^{エ}\boxed{a<5-2\sqrt{6}}$.

このとき，x の方程式①も異なる２つの実数解をもち，これらを α，β とすると，②の２解は $\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha$，$\left(\frac{2}{3}\right)^\beta$ であり，これらの積は解と係数の関係より，

$$\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha\times\left(\frac{2}{3}\right)^\beta=\frac{3}{2}.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+\beta}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}.$$

$$\alpha+\beta={}^{オ}\boxed{-1}.$$

〔2〕 題意より，$a_{n+1}={}^{カ}\boxed{\frac{9}{10}a_n+p}$ がすべての自然数 n に対して成り立つ．

これを，

$$a_{n+1}-10p=\frac{9}{10}(a_n-10p)$$

と変形することで，数列 $\{a_n-10p\}$ は公比 $\frac{9}{10}$ の等比数列であることがわかり，

$$\begin{aligned}a_n-10p&=(a_1-10p)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\\&=(10-10p)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\\&=10\left\{-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right\}p+10\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

これより，

$$a_n=10\left\{{}^{キ}\boxed{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}\right\}p+10\,{}^{ク}\boxed{\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}.$$

よって，毎回水を入れた直後の水の容積が一定となるのは，n に依らず a_n が一定の値をとるような p を考えると，

$$10-10p=0 \quad つまり \quad p={}^{ケ}\boxed{1}$$

のときである．

〔3〕 1回目の小テストの成績の標準偏差が2であったことから，1回目の小テストの成績の分散は $2^2={}^{コ}\boxed{4}$ である．

1回目と2回目で成績が変わらなかった3人の点数を a(点)，b(点)，c(点) とする．

1回目の小テストの成績の平均が5であることから，

$$\frac{3\times3+5\times2+7\times2+a+b+c}{10}=5.$$

これより，

$$a+b+c=17. \qquad \cdots\cdots①$$

さらに，1回目の小テストの成績の分散が 2^2 であることから，

$$\frac{3^2\times3+5^2\times2+7^2\times2+a^2+b^2+c^2}{10}-5^2=2^2.$$

これより，

$$a^2+b^2+c^2=115. \qquad \cdots\cdots②$$

①より，2回目の小テストの成績の平均は，

$$\frac{5\times3+8\times2+6\times2+a+b+c}{10}={}^{サ}\boxed{6}\ (点)$$

であり，これと②より，2回目の小テストの成績の分散は，

$$\frac{5^2\times3+8^2\times2+6^2\times2+a^2+b^2+c^2}{10}-6^2=\frac{390-360}{10}=3.$$

よって，2回目の小テストの成績の標準偏差は $^{シ}\boxed{\sqrt{3}}$ (点).

Ⅱ

〔1〕　$f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ とおくと，

$$f(x)=(x-2)(x^2-4x+1)$$

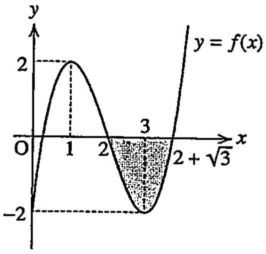
より，

$$f(x)=0 \iff x=2,\ 2\pm\sqrt{3}.$$

また，$f'(x)=3x^2-12x+9=2(x-1)(x-3)$ である．
これより，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	−2	↗

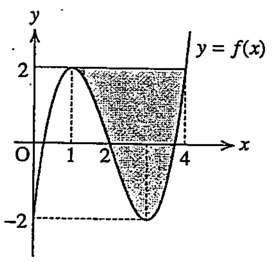
(fig.1)



(fig.1) における斜線部分の面積を S_1 とすると，

$$S_1=\int_2^{2+\sqrt{3}}-f(x)dx$$
$$=\int_2^{2+\sqrt{3}}-(x-2)\{(x-2)^2-3\}dx$$
$$=\int_2^{2+\sqrt{3}}\{-(x-2)^3+3(x-2)\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}(x-2)^4+\frac{3}{2}(x-2)^2\right]_2^{2+\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{1}{4}(\sqrt{3})^4+\frac{3}{2}(\sqrt{3})^2=\frac{9}{4}.$$

(fig.2)



(fig.2) における斜線部分の面積を S_2 とすると，

$$S_2=\int_1^4\{2-f(x)\}dx=\int_1^4-(x-1)^2(x-4)dx$$
$$=\int_1^4-(x-1)^2\{(x-1)-3\}dx$$
$$=\int_1^4\{-(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_1^4$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot3^4+3^3=\frac{27}{4}.$$

容器の最も深いところの xy 座標は（ア $\boxed{3}$，イ $\boxed{-2}$）である．

単位時間当たりに流れ出る水の体積を q としているので，時間 t の間に蛇口から流れ出る水の体積は ウ $\boxed{qt}$ である．

容器が空の状態から水面が $y=0$ に到達するまでには，水を $S_1\times1=\frac{9}{4}$ だけ入れなければならず，それに要する時間は エ $\boxed{\frac{9}{4q}}$ である．

水があふれ出るところの xy 座標は（オ $\boxed{1}$，カ $\boxed{2}$）である．

容器が空の状態から水があふれまでには，水を $S_2\times1=\frac{27}{4}$ だけ入れなければならず，それに要する時間は キ $\boxed{\frac{27}{4q}}$ である．

〔2〕　$-2<y<2$ に対して，$y\leqq s\leqq y+\Delta y$ かつ

$$\Delta V=V(y+\Delta y)-V(y)=\text{ク}\ \boxed{\{\gamma(s)-\beta(s)\}\Delta y}$$

を満たす s が存在する．

また，短い時間 Δt の間に蛇口から流れ出る水の体積は ケ $\boxed{q\Delta t}$ なので，

$$q\Delta t=\{\gamma(s)-\beta(s)\}\Delta y$$

となる．これより，

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{q}{\gamma(s)-\beta(s)}.$$

ここで，$\Delta t\to0$ のとき，$\Delta y\to$ コ $\boxed{0}$，$s\to$ サ $\boxed{y}$ であるので，

$$\frac{dy}{dt}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{q}{\gamma(s)-\beta(s)}=\text{シ}\ \boxed{\frac{q}{\gamma(y)-\beta(y)}}$$

が得られる．

Ⅲ

$\angle AOP = 90°$ より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = 0$.
ここで，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = 0\cdot t + 1\cdot u + 2\cdot t = u + 2t$$

より，

$$u + 2t = 0. \quad \cdots\cdots①$$

また，$OP = 2\sqrt{6}$ より，$\sqrt{t^2+u^2+t^2} = 2\sqrt{6}$.

$$2t^2 + u^2 = 24. \quad \cdots\cdots②$$

①，②より，$t^2 = 4$.
$t > 0$ のとき，$t =$ ア $\boxed{2}$，$u = -2t =$ イ $\boxed{-4}$.
4点 $O(0,0,0)$，$A(0,1,2)$，$B(2,-1,3)$，$P(2,-4,2)$ を通る球面を S とし，S の中心を $T(a,b,c)$，半径を r $(r>0)$ とすると，

$$TO = TA = TB = TP = r$$

が成り立つ．これより，

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = r^2, \\ a^2+(b-1)^2+(c-2)^2 = r^2, \\ (a-2)^2+(b+1)^2+(c-3)^2 = r^2, \\ (a-2)^2+(b+4)^2+(c-2)^2 = r^2. \end{cases}$$

これらを解くと，

$$a = -\frac{3}{2},\ b = -\frac{5}{2},\ c = \frac{5}{2},\ r = \frac{\sqrt{59}}{2}.$$

よって，球面 S の中心は $T\left(\text{ウ}\boxed{-\frac{3}{2}},\ \text{エ}\boxed{-\frac{5}{2}},\ \text{オ}\boxed{\frac{5}{2}}\right)$ であり，半径は カ $\boxed{\frac{\sqrt{59}}{2}}$ である．

さらに，球面 S と平面 $z = k$ が交わってできる円 C_1 の方程式は k を用いて，

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(k-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{59}{4} \quad \text{かつ} \quad z = k$$

つまり，

$$\left(x + \text{キ}\boxed{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(y + \text{ク}\boxed{\frac{5}{2}}\right)^2 = \text{ケ}\boxed{-k^2+5k+\frac{17}{2}} \ \text{かつ}\ z = k$$

と表される．

この円の半径が $\sqrt{7}$ のとき，$-k^2+5k+\frac{17}{2} = \left(\sqrt{7}\right)^2$ より，

$$2k^2 - 10k - 3 = 0.$$

これより，$k =$ コ $\boxed{\frac{5-\sqrt{31}}{2}}$ または サ $\boxed{\frac{5+\sqrt{31}}{2}}$ である．

$\boxed{コ}$ と $\boxed{サ}$ については順序は問わない．

ここで，ベクトル $\vec{m} = (5,4,-2)$ を考えると，

$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{OA} = \vec{m}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$$

を満たすので，$\vec{m}$ は平面 α の法線ベクトルである．$\vec{m}$ の x 成分は正の値であることに注意すると，平面 α に垂直で，x 成分が正の単位ベクトル $\vec{n}$ は，

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{m}|}\vec{m} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(5,4,-2) = \left(\text{シ}\boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}},\ \text{ス}\boxed{\frac{4\sqrt{5}}{15}},\ \text{セ}\boxed{-\frac{2\sqrt{5}}{15}}\right).$$

平面 α と球面 S が交わってできる円 C_2 は三角形 OAB の外接円であり，その中心を T_2 とすると，$\overrightarrow{TT_2}$ は $\overrightarrow{TO}$ の $\vec{m}$ への正射影ベクトルであるから，

$$\overrightarrow{TT_2} = \frac{\overrightarrow{TO}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|^2}\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{m} = \left(\frac{5}{2},\ 2,\ -1\right).$$

したがって，

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TT_2} = \left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

より，円 C_2 の中心 T_2 は $\left(\text{ソ}\boxed{1},\ \text{タ}\boxed{-\frac{1}{2}},\ \text{チ}\boxed{\frac{3}{2}}\right)$ であり，円 C_2 の半径は，

$$\left|\overrightarrow{OT_2}\right| = \sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \text{ツ}\boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

である．

Ⅳ

〔1〕

(a)　2回目で初めて赤色のカードを引くのは，1回目に $\frac{4}{7}$ の確率で白色のカードを引き，そのもとで，2回目に $\frac{3}{6}$ の確率で赤色のカードを引くときであるから，その確率は，

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}={}^{ア}\boxed{\frac{2}{7}}.$$

3回目で初めて赤色のカードを引くのは，1回目は $\frac{4}{7}$ の確率で白色のカードを引き，そのもとで，2回目は $\frac{3}{6}$ の確率で白色のカードを引き，そのもとで，3回目は $\frac{3}{5}$ の確率で赤色のカードを引くときであるから，その確率は，

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}={}^{イ}\boxed{\frac{6}{35}}.$$

(b)　引いたカードに書かれた数の合計が10となるのは，次の場合に限る．

1回目	2回目	3回目	確率
1	4	5	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$
4	1	5	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$
2	3	5	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$
3	2	5	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$
1	3	6	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$
3	1	6	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$
4	6		$\frac{1}{7\cdot6}$
1	2	7	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$
2	1	7	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$
3	7		$\frac{1}{7\cdot6}$

よって，求める確率は，

$$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}\times8+\frac{1}{7\cdot6}\times2={}^{ウ}\boxed{\frac{3}{35}}.$$

(c)　引いたカードに書かれた数がすべて奇数であるのは，次の場合に限る．

1回目	2回目	3回目	確率	印
5			$\frac{1}{7}$	
7			$\frac{1}{7}$	
1	5		$\frac{1}{7\cdot6}$	★
1	7		$\frac{1}{7\cdot6}$	★
3	5		$\frac{1}{7\cdot6}$	
3	7		$\frac{1}{7\cdot6}$	
1	3	5	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$	★
3	1	5	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$	★
1	3	7	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$	★
3	1	7	$\frac{1}{7\cdot6\cdot5}$	★

よって，引いたカードに書かれた数がすべて奇数である確率は，

$$\frac{1}{7}\times2+\frac{1}{7\cdot6}\times4+\frac{1}{7\cdot6\cdot5}\times4={}^{エ}\boxed{\frac{2}{5}}.$$

このとき，引いたカードの中に1のカードが含まれるのは，表の右端に★印をつけた場合であるから，その確率は，

$$\frac{1}{7}\times0+\frac{1}{7\cdot6}\times2+\frac{1}{7\cdot6\cdot5}\times4={}^{オ}\boxed{\frac{1}{15}}.$$

(注意) $\boxed{オ}$ を条件付き確率であると解釈すると，次のように計算できる．すなわち，引いたカードに書かれた数がすべて奇数であるという条件のもとで，引いたカードの中に1のカードが含まれる条件付き確率は，

$$\frac{\frac{1}{15}}{\frac{14}{35}}={}^{オ}\boxed{\frac{1}{6}}.$$

〔2〕　n を3以上の整数とするとき，4回目ではじめて赤色のカードを引く確率 $P_n(4)$ は，

$$P_n(4)=\frac{{}_nP_3\times{}_3P_1}{{}_{n+3}P_4}=\frac{n(n-1)(n-2)\times3}{(n+3)(n+2)(n+1)n}=\frac{3(n-1)(n-2)}{(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

これより，

$$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)}=\frac{\frac{3n(n-1)}{(n+4)(n+3)(n+2)}}{\frac{3(n-1)(n-2)}{(n+3)(n+2)(n+1)}}={}^{カ}\boxed{\frac{n(n+1)}{(n+4)(n-2)}}.$$

ここで，$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)}>1$，$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)}=1$，$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)}<1$ を満たす n をそれぞれ調べることで，$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)}$ は，$n=3,4,5,6,7$ に対しては1より大きく，$n=8$ に対しては1であり，$n=9,10,11,\cdots$ に対しては1より小さいことがわかる．これより，

$$P_3(4)<P_4(4)<\cdots<P_7(4)<P_8(4)=P_9(4)>P_{10}(4)>\cdots$$

が成り立つ．

したがって，$P_n(4)$ が最大となるのは，$n\ (\geqq 3)$ が ${}^{キ}\boxed{8}$ または ${}^{ク}\boxed{9}$ のときである．

$\boxed{キ}$ と $\boxed{ク}$ については順序は問わない．