I

〔1〕 $D : (|x|+1)^2+y^2 \leqq 4\ .$ $\cdots$①

(a) $(|x|+1)^2+y^2=4\ .$ $\cdots$②

② において $y=0$ とすると，

$$(|x|+1)^2=4\ .$$

$|x|+1 \geqq 1$ に注意すると

$$|x|+1=2 \quad \text{すなわち} \quad |x|=1\ .$$

$$x=\pm 1\ .$$

よって，② と x 軸との共有点の座標は

$$\left(\overset{ア}{\boxed{1}},\ 0\right),\ (-1,\ 0)\ .$$

また，② において $x=0$ とすると

$$1+y^2=4 \quad \text{すなわち} \quad y=\pm\sqrt{3}\ .$$

よって，② と y 軸との共有点の座標は

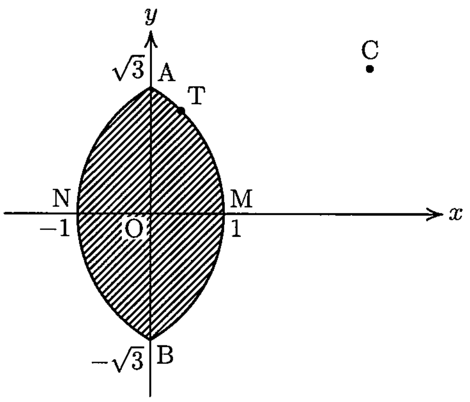
$$\left(0,\ \overset{イ}{\boxed{\sqrt{3}}}\right),\ (0,\ -\sqrt{3})\ .$$

(b) 不等式 ① は

$x \geqq 0$ のとき $(x+1)^2+y^2 \leqq 4\ ,$

$x \leqq 0$ のとき $(x-1)^2+y^2 \leqq 4$

と表せるから，(a) の結果も踏まえると，領域 D は次図の斜線部（境界を含む）のようになる．



D の境界線は M$(1,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円弧と，N$(-1,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円弧からなり，M , N は D の境界線と x 軸との共有点でもある．

D は x 軸対称であるから，

$$\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})\ ,\quad \mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$$

とおき，D の面積を S とすると，

$$S=2\{(\text{扇形 NAB})-\triangle\,\mathrm{NAB}\}\ .$$

線分 AB の中点は原点 O で，

$$\mathrm{NA}=2\ ,\quad \mathrm{NO}=1$$

であるから，

$$\angle\mathrm{ANB}=2\angle\mathrm{ANO}=\frac{2}{3}\pi\ .$$

よって，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\overset{ウ}{\boxed{\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}}}\ .$$

(c) $x+y=k$ とおくと $y=-x+k\ .$ $\cdots$③

③ は傾きが -1 で y 切片が k の直線を表す．この直線が D と共有点をもつような k の最大値，最小値が，求める $x+y$ の最大値，最小値である．

N を中心とする半径 2 の円が ③ と接するとき，

$$\frac{|-1+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2 \quad \text{より} \quad k=\pm 2\sqrt{2}-1\ .$$

特に $k=2\sqrt{2}-1$ のときについて，接点を T とおくと，NT は ③ と垂直であるから傾きが 1 である．したがって，

$$\angle\mathrm{TNO}=\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}=\angle\mathrm{ANO}$$

であるから，T は D に含まれる．

よって，$x+y$ の最大値は $\overset{エ}{\boxed{2\sqrt{2}-1}}$ である．

また，D は原点対称であるから，原点に関する T の対称点で ③ が D の境界線に接するとき $x+y$ は最小となり，最小値は $\overset{オ}{\boxed{-2\sqrt{2}+1}}$ である．

(d) D を動く点 $(x,\ y)$ を P とし，点 $(3,\ 2)$ を C とすると，$(x-3)^2+(y-2)^2=\mathrm{CP}^2\ .$

直線 MC の傾きは 1 であるから，直線 MC と円弧 BN は交わり，P がこの交点に一致するとき CP は最大値

$$\mathrm{MC}+2=\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2}+2=2\sqrt{2}+2$$

をとる．

また，直線 NC の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるから，直線 NC と円弧 AM は交わり，P がこの交点に一致するとき CP は最小値

$$\mathrm{NC}-2=\sqrt{(3+1)^2+(2-0)^2}-2=2\sqrt{5}-2$$

をとる．

よって，$(x-3)^2+(y-2)^2$ の

最大値は $(2\sqrt{2}+2)^2=\overset{カ}{\boxed{12+8\sqrt{2}}}\ ,$

最小値は $(2\sqrt{5}-2)^2=\overset{キ}{\boxed{24-8\sqrt{5}}}\ .$

〔2〕 サイコロを 3 回投げるとき，目の出方の総数は $6^3=216$ 通りであり，これらは同様に確からしい．

(a) $m=5$ となるのは，出た目が 3 回とも 5 または 6 であり，かつ，少なくとも 1 回は 5 の目が出た場合である．

これは,「出た目が 3 回とも 5 または 6」である場合から,「3 回とも 6 の目が出た」場合を除いたものであるから，

$$2^3-1=7 \text{ 通り}$$

ある．

よって，求める確率は $\overset{\text{ク}}{\boxed{\dfrac{7}{216}}}$ である．

(b) $m \leqq 4 \leqq M$ すなわち

$$m \leqq 4 \quad \text{かつ} \quad M \geqq 4$$

の余事象は

$$m \geqq 5 \quad \text{または} \quad M \leqq 3 \qquad \cdots(*)$$

である．

$m \geqq 5$: 3 回とも 5 または 6 の目，
$M \leqq 3$: 3 回とも 1 または 2 または 3 の目

が出た場合であり，これらは互いに排反である．

よって，$(*)$ の目の出方は

$$2^3+3^3=35 \text{ 通り}$$

であるから，求める確率は

$$1-\frac{35}{216}=\overset{\text{ケ}}{\boxed{\frac{181}{216}}}$$

である．

(c) $m=2$ かつ $M=6$ となる目の出方は，x を 3 または 4 または 5 として，

$$(2,\ 2,\ 6),\ (2,\ x,\ 6),\ (2,\ 6,\ 6)$$

およびこれらの並べ替えであるから，

$$\frac{3!}{2!}+3\cdot 3!+\frac{3!}{2!}=24 \text{ 通り}.$$

よって，求める確率は $\dfrac{24}{216}=\overset{\text{コ}}{\boxed{\dfrac{1}{9}}}$ である．

(d) $M-m=3$ となる $(m,\ M)$ の組は

$$(m,\ M)=(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6)$$

である．

$(m,\ M)=(1,\ 4)$ となる目の出方は，y を 2 または 3 として，

$$(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ y,\ 4),\ (1,\ 4,\ 4)$$

およびこれらの並べ替えであるから，

$$\frac{3!}{2!}+2\cdot 3!+\frac{3!}{2!}=18 \text{ 通り}.$$

$(m,\ M)=(2,\ 5),\ (3,\ 6)$ のときも同様に 18 通りずつあるから，求める確率は

$$\frac{18\times 3}{216}=\overset{\text{サ}}{\boxed{\frac{1}{4}}}$$

である．

〔3〕 $$y=\frac{1}{4}x^2+1 . \qquad \cdots ①$$

$y'=\frac{1}{2}x$ であるから，点 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2+1\right)$ における放物線 ① の接線の方程式は，

$$y-\left(\frac{1}{4}t^2+1\right)=\frac{1}{2}t(x-t) .$$

$$y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2+1 .$$

これが点 $(-5,\ 7)$ を通るとき，

$$7=\frac{1}{2}t\cdot(-5)-\frac{1}{4}t^2+1 .$$

$$t^2+10t+24=0 .$$

$$(t+6)(t+4)=0 .$$

$$t=-6\ ,\ -4 .$$

よって，点 $(-5,\ 7)$ を通る接線は 2 本あり，そのうち傾き $\frac{1}{2}t$ の大きい方 (l_1) の方程式は，$t=-4$ に対応する

$$y=\overset{シ}{\boxed{-2}}x-\overset{ス}{\boxed{3}} . \qquad \cdots ②$$

また，l_1 に垂直な ① の接線 l_2 について，接点の座標を $\left(s,\ \frac{1}{4}s^2+1\right)$ とすると，l_2 の方程式は

$$y=\frac{1}{2}sx-\frac{1}{4}s^2+1$$

であり，

$$-2\cdot\frac{1}{2}s=-1 \quad \text{より} \quad s=1 .$$

よって，l_2 の方程式は

$$y=\overset{セ}{\boxed{\frac{1}{2}}}x+\overset{ソ}{\boxed{\frac{3}{4}}} . \qquad \cdots ③$$

$t=-4$ であることから ① と l_1 の接点 A の座標は $(-4,\ 5)$.

② と ③ を連立して，l_1 と l_2 の交点 B の座標は $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$.

$s=1$ であることから ① と l_2 の接点 C の座標は $\left(1,\ \frac{5}{4}\right)$.

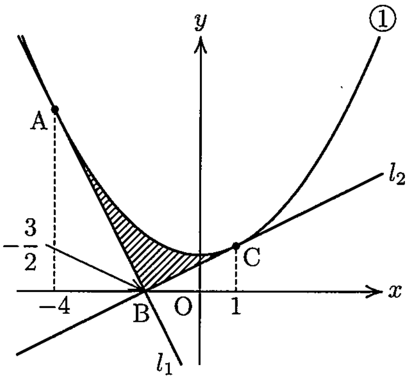
よって，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}+4\right)^2+(0-5)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2} ,$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\left(1+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-0\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$$

であるから，長方形 ABCD の面積は

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}=\overset{タ}{\boxed{\frac{125}{8}}} .$$



また，① と l_1 , l_2 で囲まれた図形の面積を S とおくと，

$$S=\int_{-4}^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-(-2x-3)\right\}dx+\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-4}^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{4}(x+4)^2\,dx+\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\frac{1}{4}(x-1)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}(x+4)^3\right]_{-4}^{-\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{12}(x-1)^3\right]_{-\frac{3}{2}}^{1}$$

$$=\left\{\frac{1}{12}\left(\frac{5}{2}\right)^3-0\right\}+\left\{0-\frac{1}{12}\left(-\frac{5}{2}\right)^3\right\}$$

$$=\overset{チ}{\boxed{\frac{125}{48}}} .$$

II　大学の出題に関する公表に基づいて解答を作成しています。

(注) 問題文にある $800 \leqq P \leqq 1600$ は，$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ の導出における $P=1801$，$P=730$ とくい違うこと，それ以降ではこの条件の有無で結果が変わらないことから，
$800 \leqq P \leqq 1600$ の条件をないものとして解答を作成しました．

まず，
$$A = [\sqrt{20(3081-P)}] \qquad \cdots①$$
であるから，$P=1801$ のとき
$$A = [\sqrt{20 \cdot 1280}] = [160] \overset{ア}{=} \boxed{160}.$$
また，
$$B = [\sqrt{50(P-280)}] \qquad \cdots②$$
であるから，$P=730$ のとき
$$B = [\sqrt{50 \cdot 450}] = [150] \overset{イ}{=} \boxed{150}.$$
一方，方程式
$$20(3081-Q) = 50(Q-280) \qquad \cdots③$$
を解くと，
$$Q = \frac{7562}{7} = 1080.2\cdots \overset{ウ}{=} \boxed{1080}$$
であり，$P=1080$ のとき
$$20(3081-P) = 40020, \quad 50(P-280) = 40000$$
であり，
$$200^2 = 40000, \ 201^2 = 40401$$
より
$$200 = \sqrt{40000} < \sqrt{40020} < 201$$
であるから，
$$A = B \overset{エ}{=} \boxed{200}.$$
次に，$A=200$ のとき，① より
$$200 \leqq \sqrt{20(3081-P)} < 201.$$
$$200^2 \leqq 20(3081-P) < 201^2. \qquad \cdots④$$
$$2000 \leqq 3081-P < 2020.05.$$
$$1060.95 < P \leqq 1081.$$
これを満たす最小の整数 P は
$$P \overset{オ}{=} \boxed{1061},$$
最大の P は
$$P \overset{カ}{=} \boxed{1081}.$$
また，$B=200$ のとき，② より
$$200 \leqq \sqrt{50(P-280)} < 201.$$
$$200^2 \leqq 50(P-280) < 201^2. \qquad \cdots⑤$$
$$800 \leqq P-280 < 808.02.$$
$$1080 \leqq P < 1088.02.$$
これを満たす最小の整数 P は
$$P \overset{キ}{=} \boxed{1080},$$
最大の P は
$$P \overset{ク}{=} \boxed{1088}.$$
よって，④，⑤ をともに満たす整数 P のうち最小のものは
$$P \overset{ケ}{=} \boxed{1080}.$$
ここで，$P_0 = 1080$，$X_0 = 200$ とおく．
$P = P_0 + 381 = 1461$ のとき，
$$20(3081-P) = 32400, \quad 50(P-280) = 59050$$
であり，
$$\sqrt{32400} = 180$$
であるから，
$$A = [\sqrt{32400}] = 180 \ (< B).$$
よって，$X_1 \overset{コ}{=} \boxed{180}$ であり，$\overset{サ}{\boxed{X_0 > X_1}}$ である．
また，$P = P_0 - 152 = 928$ のとき，
$$20(3081-P) = 43060, \quad 50(P-280) = 32400$$
であるから，
$$B = [\sqrt{32400}] = 180 \ (< A).$$
よって，$X_2 \overset{シ}{=} \boxed{180}$ であり，$\overset{ス}{\boxed{X_0 > X_2}}$ である．

III

$$a_1 = 2\ ,\quad a_{n+1} = 5 - \frac{4}{a_n}\ . \qquad \cdots①$$

$$b_n = a_1 a_2 \cdots a_n\ . \qquad \cdots②$$

〔1〕 ① より，

$$a_2 = 5 - \frac{4}{a_1} = 5 - \frac{4}{2} = 3\ ,$$

$$a_3 = 5 - \frac{4}{a_2} = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

であるから，

$$b_1 = a_1 = 2\ ,$$

$$b_2 = a_1 a_2 = 2 \cdot 3 = \mathbf{6}\ , \qquad \cdots(答)$$

$$b_3 = a_1 a_2 a_3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{11}{3} = \mathbf{22}\ . \qquad \cdots(答)$$

〔2〕 ② より，$n \geqq 2$ のとき

$$b_{n-1} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\ . \qquad \cdots③$$

②÷③ より，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}\ . \qquad \cdots④$$

よって，$n \geqq 1$ のとき

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}\ . \qquad \cdots⑤$$

④，⑤ を ① に代入すると，$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 5 - 4 \cdot \frac{b_{n-1}}{b_n}\ .$$

$$b_{n+1} = \mathbf{5b_n - 4b_{n-1}}\ . \qquad \cdots⑥(答)$$

〔3〕 ⑥ より，$n \geqq 2$ のとき

$$b_{n+1} - b_n = 4(b_n - b_{n-1})\ .$$

よって，$c_n = b_{n+1} - b_n$ とおくと，

$$c_n = 4c_{n-1}$$

であるから，〔1〕もあわせて，数列 $\{c_n\}$ は

初項 $c_1 = b_2 - b_1 = 4$ ，　公比 4

の等比数列である．したがって，

$$c_n = 4 \cdot 4^{n-1} = \mathbf{4^n}\ . \qquad \cdots(答)$$

〔4〕 $b_{n+1} - b_n = c_n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k \\ &= 2 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{1}{3}(4^n + 2)\ . \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって，

$$b_n = \mathbf{\frac{1}{3}(4^n + 2)}\ .$$

〔5〕 ④ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{b_n}{b_{n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(4^n + 2)}{\frac{1}{3}(4^{n-1} + 2)} \\ &= \frac{4^n + 2}{4^{n-1} + 2}\ . \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって，

$$a_n = \mathbf{\frac{4^n + 2}{4^{n-1} + 2}}\ .$$

(参考)

$$\begin{cases} a_1 = 2\ , \\ a_n \geqq 2 \text{ と仮定すると } a_{n+1} \geqq 5 - \frac{4}{2} = 3 \geqq 2 \end{cases}$$

であるから，数学的帰納法により，$a_n \geqq 2$ が示せる．

したがって，①，④，⑤ の分母が 0 になることはない．