I

〔1〕 原点をOとする．条件より

$$AB^2=a^2+b^2=(r+2)^2$$

であり

$$\overrightarrow{OP}=\frac{r\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+r}=\frac{r}{r+2}(a,0)+\frac{2}{r+2}(0,b)$$

より

$$x=\frac{ar}{r+2},\quad y=\frac{2b}{r+2}$$

であるから

$$a=\frac{(r+2)x}{r},\ \cdots(ア)(答)$$

$$b=\frac{(r+2)y}{2}.\ \cdots(イ)(答)$$

以上より

$$\frac{(r+2)^2x^2}{r^2}+\frac{(r+2)^2y^2}{2^2}=(r+2)^2$$

すなわち

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4}=1\ \cdots①.\ \cdots(ウ)(答)$$

〔2〕 ①と $y=sx+t$ より，y を消去して

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(sx+t)^2}{4}=1.$$

両辺に $4r^2$ をかけ，整理して

$$(r^2s^2+4)x^2+2r^2stx+r^2(t^2-4)=0.\ \cdots(エ)(オ)(答)$$

この x の２次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(r^2st)^2-(r^2s^2+4)\cdot r^2(t^2-4)\\&=4r^2(r^2s^2-t^2+4).\end{aligned}$$

l_1 が C の接線となるための必要十分条件は，$D=0$ より

$$t^2-r^2s^2=4\ \cdots②.\ \cdots(カ)(答)$$

〔3〕 l_2 の方程式は

$$y=u(x-p)+q$$

すなわち

$$y=ux-pu+q.\ \cdots(キ)(答)$$

直交条件より，l_3 の傾きは $-\dfrac{1}{u}$ であるから，l_3 の方程式は

$$y=-\frac{1}{u}(x-p)+q$$

すなわち

$$y=-\frac{1}{u}x+\frac{p}{u}+q.\ \cdots(ク)(答)$$

l_2 が C の接線となるための必要十分条件は，②の t を $-pu+q$，s を u に書き換えて

$$(-pu+q)^2-r^2u^2=4$$

すなわち

$$(r^2-p^2)u^2+2pqu+4-q^2=0\ \cdots③.\ \cdots(ケ)(コ)(答)$$

l_3 が C の接線となるための必要十分条件は，この式の u を $-\dfrac{1}{u}$ に書き換えて

$$(r^2-p^2)\left(-\frac{1}{u}\right)^2+2pq\left(-\frac{1}{u}\right)+4-q^2=0$$

すなわち

$$(4-q^2)u^2-2pqu+r^2-p^2=0\ \cdots④.$$

③+④ より

$$(r^2+4-p^2-q^2)(u^2+1)=0.$$

したがって，点Qの軌跡を表す方程式は

$$r^2+4-p^2-q^2=0$$

より

$$p^2+q^2=r^2+4.\ \cdots(サ)(答)$$

Ⅱ　大学の出題に関する公表に基づいて解答を作成しています。

$$ax+by=dl \quad \cdots(1).$$

〔1〕　d は a と b の最大公約数であるから，a' と b' の最大公約数は

$$1 \quad \cdots(ア)(答)$$

である．

(1)に $a=a'd$，$b=b'd$ を代入して

$$a'dx+b'dy=dl$$

すなわち

$$a'x+b'y=l \quad \cdots(2).$$

$l=1$ のとき，(2)の整数解の 1 つが x_0，y_0 であるから

$$a'x_0+b'y_0=1 \quad \cdots(3).$$

(2)から(3)の l 倍を引いて

$$a'(x-lx_0)+b'(y-ly_0)=0 \quad \cdots(4).$$

a' と b' の最大公約数が 1 であり，$x-lx_0$ と $y-ly_0$ はともに整数であるから

$x-lx_0$ は b' の倍数，$\cdots$(イ)(答)

$y-ly_0$ は a' の倍数 $\cdots$(ウ)(答)

となる．

$$\frac{x-lx_0}{b'}=\frac{-(y-ly_0)}{a'}=m \quad (m \text{ は整数}) \cdots(5)$$

とおくと，(1)の整数解は

$$x=b'm+lx_0 \quad \cdots(エ)(答),$$

$$y=-a'm+ly_0 \quad \cdots(オ)(答)$$

と表される．

〔2〕　$y=-x^2+c$，$ax+by=l$ より，y を消去して

$$ax+b(-x^2+c)=l$$

すなわち

$$bx^2-ax-bc+l=0 \quad \cdots①.$$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-a)^2-4b(-bc+l)=a^2+4b^2c-4bl.$$

放物線と直線が異なる 2 つの共有点をもつのは，$D>0$ より

$$a^2+4b^2c-4bl>0$$

すなわち

$$c>\frac{4bl-a^2}{4b^2} \quad \cdots(カ)(答)$$

のときである．

2 次方程式①を解くと

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b}$$

であり，これと $ax+by=l$ より

$$y=\frac{l-ax}{b}$$

$$=\frac{l-a\cdot\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b}}{b}$$

$$=\frac{2bl-a^2\mp a\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b^2} \quad (\text{複号同順}).$$

よって，共有点の座標は

$$\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b},\ \frac{2bl-a^2\mp a\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b^2}\right)$$

(複号同順) $\cdots$(キ)(答)

である．

整数解が $y<-x^2+c$ を満たすためには，m は

$$\frac{a-\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b}<bm+lx_0<\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b}$$

すなわち

$$\frac{a-2blx_0}{2b^2}-\frac{\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b^2}<m<\frac{a-2blx_0}{2b^2}+\frac{\sqrt{a^2+4b^2c-4bl}}{2b^2} \quad \cdots(ク)(答)$$

$\cdots(6)$

を満たす必要がある．

$a=2$，$b=3$，$l=2$ のとき，(6)は

$$\frac{1-6x_0}{9}-\frac{\sqrt{9c-5}}{9}<m<\frac{1-6x_0}{9}+\frac{\sqrt{9c-5}}{9} \quad \cdots②$$

となる．

ここで

$2x_0+3y_0=1$ すなわち $2(x_0+1)=-3(y_0-1)$

より，2 と 3 の最大公約数が 1 であることを考慮すると

$x_0+1=3n$ すなわち $x_0=3n-1$ (n は整数)

とおける．これを②に代入して整理すると

Ⅱ

$$\frac{7}{9}-\frac{\sqrt{9c-5}}{9}<m+2n<\frac{7}{9}+\frac{\sqrt{9c-5}}{9}.$$

整数 m がちょうど 2 個存在することと整数 $m+2n$ がちょうど 2 個存在することは同値であるから，求める c のとりうる値の範囲は

$$\frac{7}{9}-\frac{\sqrt{9c-5}}{9}<0 \text{ かつ } \frac{7}{9}+\frac{\sqrt{9c-5}}{9}\leqq 2$$

すなわち

$$6<c \text{ かつ } c\leqq 14$$

より

$$6<c\leqq 14. \quad \cdots(\text{ケ})(\text{コ})(\text{答})$$

Ⅲ

〔1〕 $[0,1]$ において，$f(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$ より

$$f'(t)=2\cdot\frac{1\cdot(1+t^2)-t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\geqq 0$$ …(ア)(答)

であるから，$f(t)$ は単調に増加する．

よって，$f(t)$ の値域は

$$f(0)\leqq f(t)\leqq f(1)$$

すなわち

$$0\leqq f(t)\leqq 1\ .$$ …(イ)(答)

また

$$\sqrt{1-\{f(t)\}^2}=\sqrt{1-\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}$$
$$=\left|\frac{1-t^2}{1+t^2}\right|$$
$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$ …(ウ)(答)

〔2〕 $\tan\alpha=\sqrt{2}+1$ より

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1\ .$$ …(エ)(答)

〔3〕 $\sin\theta=f(t)$ と〔1〕より

θ	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$0\to 1$

$\sin\theta=f(t)$ の両辺を t で微分すると

$$\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=f'(t)$$

すなわち

$$d\theta=\frac{f'(t)}{\sqrt{1-\{f(t)\}^2}}dt$$
$$=\frac{\dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}dt$$
$$=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

よって

$$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt$$
$$=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}dt.$$ …(オ)(カ)(キ)(答)

$t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan u$ とおくと

t	$0\to 1$
u	$\frac{\pi}{4}\to\alpha$

$$dt=\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 u}du$$

であるから

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}\frac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{2}(\tan^2 u+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 u}du$$
$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}du$$
$$=2\Big[u\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}$$
$$=2\alpha-\frac{\pi}{2}.$$ …(ク)(答)

また

$$J=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$$
$$=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{\left(t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}dt$$

であり，$t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan v$ とおくと

t	$0\to 1$
v	$-\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}-\alpha$

$$dt=\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 v}dv$$

であるから

Ⅲ

$$J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}(\tan^2 v+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 v}dv$$
$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}dv$$
$$=2\Big[v\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}$$
$$=\frac{3}{2}\pi-2\alpha.$$ …(ケ)(答)

〔4〕　$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ より

x	$0\to r$
θ	$0\to\beta$

ただし，β は

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{かつ}\ r=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

を満たす θ である．

さらに

$$dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta,$$

$$(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sin\theta)(\sqrt{2}-\sin\theta)\cos\theta$$

であるから

$$K(r)=2\int_0^r\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^\beta\frac{1}{(\sqrt{2}+\sin\theta)(\sqrt{2}-\sin\theta)}d\theta$$
$$=\int_0^\beta\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}d\theta+\int_0^\beta\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}d\theta.$$

$r\to\frac{1}{\sqrt{2}}-0$ のとき，$\beta\to\frac{\pi}{2}-0$ であるから

$$\lim_{r\to\frac{1}{\sqrt{2}}-0}K(r)=I+J$$ …(コ)(答)

であり

$$\lim_{r\to\frac{1}{\sqrt{2}}-0}K(r)=\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)=\pi.$$ …(サ)(答)

Ⅳ

〔1〕 点 z を原点を中心に $\arg\alpha$ だけ回転し，原点からの距離を $|\alpha|$ 倍し，β だけ平行移動した点は

$$\alpha z+\beta \quad \cdots(\text{ア})(\text{答})$$

と表される．

〔2〕 $z_n=\alpha z_{n-1}+\beta$ より

$$\begin{aligned} z_{n+1}-z_n&=(\alpha z_n+\beta)-(\alpha z_{n-1}+\beta)\\ &=\alpha(z_n-z_{n-1}) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

であるから

$$z_n-z_{n-1}=(z_1-z_0)\alpha^{n-1}.$$

ここで

$$z_1-z_0=(\alpha i+\beta)-i=(\alpha-1)i+\beta.$$

よって

$$z_n-z_{n-1}=\{(\alpha-1)i+\beta\}\alpha^{n-1}$$

であり

$$a_n=|(\alpha-1)i+\beta||\alpha|^{n-1}. \quad \cdots(\text{イ})(\text{答})$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は，初項 $|(\alpha-1)i+\beta|$，公比 $|\alpha|$ の無限等比級数であるから，$|\alpha|<1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{|(\alpha-1)i+\beta|}{1-|\alpha|}. \quad \cdots(\text{ウ})(\text{答})$$

〔3〕 点 z を点 δ を中心に $\arg\gamma$ だけ回転し，点 δ からの距離を $|\gamma|$ 倍した点を w とすると

$$w-\delta=\gamma(z-\delta)$$

より

$$w=\gamma(z-\delta)+\delta. \quad \cdots(\text{エ})(\text{答})$$

$\alpha z+\beta=w$ とすると

$$\alpha z+\beta=\gamma(z-\delta)+\delta$$

すなわち

$$(\alpha-\gamma)z=(1-\gamma)\delta-\beta.$$

この等式が任意の複素数 z について成り立つための条件は

$$\alpha-\gamma=0 \text{ かつ } (1-\gamma)\delta-\beta=0$$

であるから

$$\gamma=\alpha \quad \cdots(\text{オ})(\text{答}), \qquad \delta=\frac{\beta}{1-\alpha} \quad \cdots(\text{カ})(\text{答}).$$

〔4〕 $z_n=\alpha z_{n-1}+\beta$ より

$$z_n-\frac{\beta}{1-\alpha}=\alpha\left(z_{n-1}-\frac{\beta}{1-\alpha}\right).$$

$\frac{\beta}{1-\alpha}=1$ であるから

$$z_n-1=\alpha(z_{n-1}-1)$$

であり

$$z_n-1=(z_0-1)\alpha^n$$

すなわち

$$z_n=(-1+i)\alpha^n+1.$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP_0}}$ を表す複素数は $-1+i$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$ を表す複素数は

$$z_2-1=(-1+i)\alpha^2=\frac{1}{3}(-1+i)(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

であるから，三角形 $\mathrm{P_0BP_2}$ の面積は

$$\frac{1}{2}|-1+i|\cdot\frac{1}{3}|-1+i|\sin2\theta=\frac{1}{3}\sin2\theta. \quad \cdots(\text{キ})(\text{答})$$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n-1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ を表す複素数はそれぞれ $z_{n-1}-z_n$，$z_{n+1}-z_n$ であり，①より

$$\begin{aligned} z_{n+1}-z_n&=-\alpha(z_{n-1}-z_n)\\ &=\frac{1}{\sqrt{3}}\{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\}(z_{n-1}-z_n) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} S_n&=\frac{1}{2}a_n\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}a_n\sin(\pi-\theta)\\ &=\frac{1}{2\sqrt{3}}a_n^2\sin\theta. \end{aligned}$$

ここで，$\beta=1-\alpha$ より

$$a_n=|1-\alpha||1-i|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$

であり

$$|1-i|^2=2,$$

$$\begin{aligned} |1-\alpha|^2&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)^2\\ &=\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta \end{aligned}$$

であるから

IV

$$S_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)\cdot 2\sin\theta\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\sin\theta-\frac{1}{3}\sin 2\theta\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \quad \cdots(ケ)(答)$$

三角形 $P_0P_1P_2$ の面積は

$$S_1=\frac{4\sqrt{3}}{9}\sin\theta-\frac{1}{3}\sin 2\theta \quad \cdots(ク)(答)$$

であり, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n-1}$ は初項 S_1 , 公比 $\frac{1}{9}$ の無限等比級数であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n-1}=\frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{3}{8}\sin 2\theta. \quad \cdots(コ)(答)$$