$\boxed{1}$ $r_n = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = r_n a_n \end{cases}$$

$a_2 = r_1 a_1 = r_1$

$a_3 = r_2 a_2 = r_2 r_1$

$a_n = r_{n-1} a_{n-1} = r_{n-1} r_{n-2} \cdots r_1$

$(n \geqq 2)$

(1) $a_4 = r_3 r_2 r_1 = 24 = 3 \cdot 2^3$

3数 r_1, r_2, r_3 の出方は

$3, 2, 4 \cdots 3! = 6$ 通り

であるから，求める確率は

$$\frac{6}{4^3} = \frac{3}{32}$$

(2) $a_5 = r_4 r_3 r_2 r_1 = 3 \cdot 2^3$

4数 r_1, r_2, r_3, r_4 の出方は

$3, 2, 2, 2 \cdots 4$ 通り

$3, 1, 2, 4 \cdots 4! = 24$ 通り

であるから，求める確率は

$$\frac{4+24}{4^4} = \frac{28}{4^4} = \frac{7}{64}$$

(3) $a_n = 24$ $(n \geqq 6)$ のとき

$r_{n-1} r_{n-2} \cdots r_1 = 3 \cdot 2^3$

(i) $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ が

$3, 2, 2, 2, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n-5\text{個}}$

のとき，

$$\frac{(n-1)!}{1!3!(n-5)!}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$$

(通り)

(ii) $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ が

$3, 2, 4, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n-4\text{個}}$

のとき，

$$\frac{(n-1)!}{1!1!1!(n-4)!}$$

$= (n-1)(n-2)(n-3)$ (通り)

(i), (ii) 合せて

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4+6)$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)(n+2)$$

（通り）

よって $a_n=24$ となる~~確率~~は

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n+2)}{6\cdot 4^{n-1}}$$

$(n\geqq 6)$

$\boxed{2}$ $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

a, b, c は整数

$|x|\leqq 1$ のとき $|f(x)|\leqq 1$

(1) $f(0)=c$ より, $c=f(0)$

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c \\ f(-1)=a-b+c \end{cases}$$

より, $b=\frac{1}{2}\{f(1)-f(-1)\}$

$$\begin{aligned} a &= f(1)-b-c \\ &= \frac{1}{2}\{f(1)+f(-1)\}-f(0) \end{aligned}$$

(2) $|c|=|f(0)|\leqq 1$

$$\begin{aligned} |b| &= \frac{1}{2}|f(1)-f(-1)| \\ &\leqq \frac{1}{2}\{|f(1)|+|f(-1)|\} \\ &\leqq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a| &= \left|\frac{1}{2}\{f(1)+f(-1)\}-f(0)\right| \\ &\leqq \left|\frac{1}{2}f(1)\right|+\left|\frac{1}{2}f(-1)\right| + |f(0)| \\ &\leqq 2 \end{aligned}$$

である.

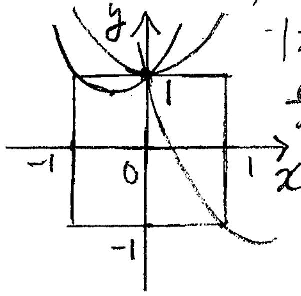
$f(x)$ が条件をみたすとき

$-f(x)$ も条件をみたすので

ひとまず $a>0$ とする.

$|a|\leqq 2$ より $a=1, 2$ である

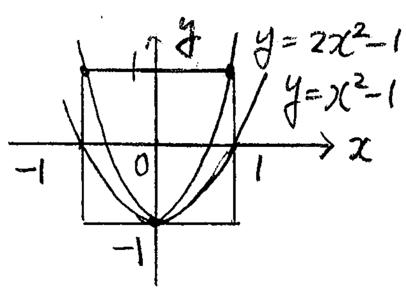
(i) $c=1$ のとき,



$|x|\leqq 1$ かつ $f(x)>1$ となる x が存在するので不適

(ii) $c=-1$ のとき

下に凸の放物線であるから, $(0,-1)$ で $y=-1$ に接する.



よって $b=0$ である.

$f(x)=x^2-1,\ 2x^2-1$

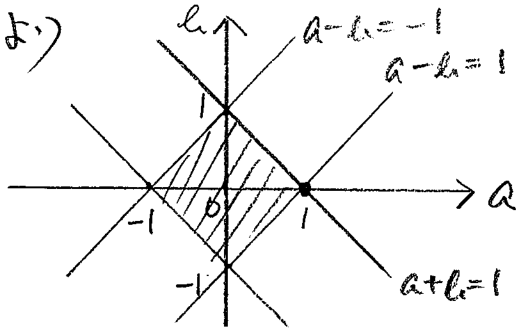
これらは条件をみたす.

(iii) $c=0$ のとき

$$|f(1)|=|a+b|\leqq 1$$

$$|f(-1)|=|a-b|\leqq 1$$

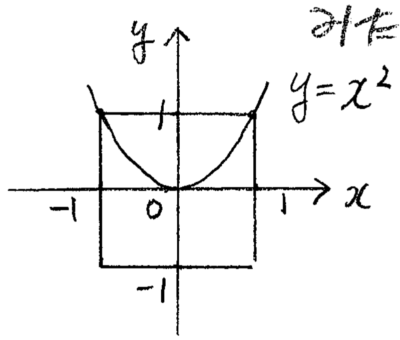
より



であり，$a>0$ より

$$(a,b)=(1,0)$$

$f(x)=x^2$ これは条件をみたす．



以上より，$a<0$ の場合も考えて

$$f(x)=\pm x^2,\ \pm(x^2-1),\ \pm(2x^2-1)$$

である．

$\boxed{3}$

(1) $x^2-4x+y^2-4y-1=0$

$(x-2)^2+(y-2)^2=9$

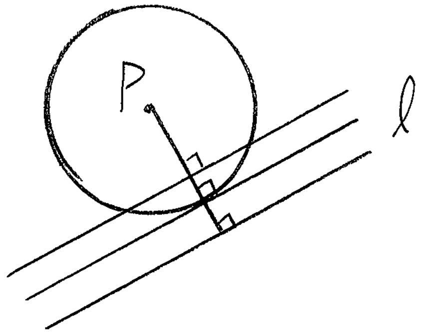
より，Cの半径は3

中心$P(2,2)$

(2) $l: 3x-4y+a=0$ と

Pとの距離をdとすると，

$$d=\frac{|6-8+a|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|a-2|}{5}$$



Cとlの共有点の個数を

Nとすると

$d<3$ ⋯ $N=2$

$d=3$ ⋯ $N=1$

$d>3$ ⋯ $N=0$

$\frac{|a-2|}{5}<3$ より

$|a-2|<15$

$-15<a-2<15$

$-13<a<17$

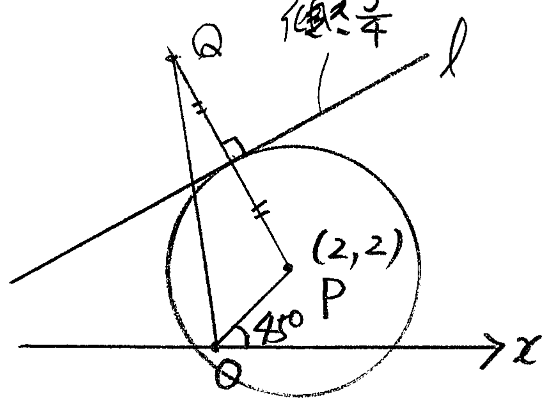
したがって

$-13<a<17$のとき，$N=2$

$a=-13, 17$のとき，$N=1$

$a<-13$, $17<a$のとき，$N=0$

(3) $a>0$ より $a=17$ である



lに平行な単位ベクトルは

$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

lに垂直な単位ベクトルは

$\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$PQ=6$, $PQ \perp l$ より

$$\overrightarrow{PQ}=6\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$$

$$=\left(2-\frac{18}{5}, 2+\frac{24}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{-8}{5}, \frac{34}{5}\right)$$

これより OQ の傾きは

$$-\frac{34}{8}=-\frac{17}{4}$$

$\tan\theta=-\frac{17}{4}$ とおくと

$$\tan\angle POQ$$

$$=\tan(\theta-45^\circ)$$

$$=\frac{\tan\theta-\tan 45^\circ}{1+\tan\theta\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{-\frac{17}{4}-1}{1-\frac{17}{4}}$$

$$=\frac{21}{13}$$

$\boxed{4}$ (1)

$$f(x)=|x^2-x|-s-x\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)dt+x\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|t|dt$$

である。

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|t|dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}|t|dt$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}t\,dt=\left[t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

であり，

$$a=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)dt$$

とおくと，

$$f(x)=|x^2-x|-s+\left(\frac{1}{4}-a\right)x$$

である．

$$a=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{|t^2-t|-s+\left(\frac{1}{4}-a\right)t\right\}dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(t^2-t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}}(-t^2+t)dt+\left[-st+\left(\frac{1}{4}-a\right)\frac{t^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}s+\cancel{\left(\frac{1}{4}-a\right)\cdot\frac{1}{8}}-\left\{\frac{1}{2}s+\cancel{\left(\frac{1}{4}-a\right)\cdot\frac{1}{8}}\right\}$$

$$=-\left(\cancel{-\frac{1}{24}}-\frac{1}{8}\right)+\left(\cancel{-\frac{1}{24}}+\frac{1}{8}\right)-s$$

$$=\frac{1}{4}-s$$

であるから，

$$f(x)=|x^2-x|-s+sx$$

$$=|x^2-x|+s(x-1)$$

(2) (i) $x\leqq 0$，$1\leqq x$ のとき

$$f(x)=x^2-x+s(x-1)$$

$$=(x+s)(x-1)$$

(ii) $0<x<1$ のとき

$$f(x)=-x(x-1)+s(x-1)$$

$$=-(x-s)(x-1)$$

(i)，(ii)より，$y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる3点で交わるとき

その x 座標は

$1,\ \pm s$ であるから

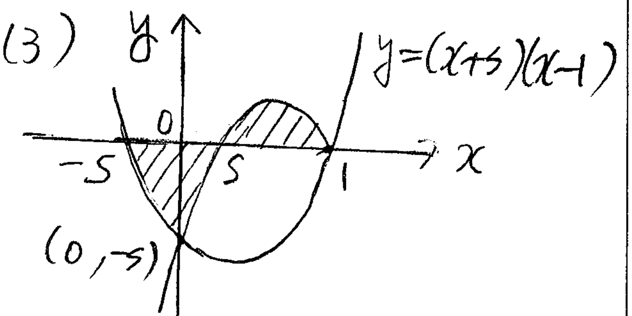
これらが異なることより

$s \neq 0,\ \pm 1$ である.

また, $\begin{cases} -s<0,\ 1<-s \\ 0<s<1 \end{cases}$

より, $0<s<1$ である

(3)



$y=-(x-s)(x-1)$

$$A(s)=\int_{-s}^{1}-(x+s)(x-1)\,dx$$

$$-\int_{0}^{1}\{-(x-s)(x-1)-(x+s)(x-1)\}dx$$

$$+2\int_{s}^{1}-(x-s)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{(1+s)^3}{6}+2\int_{0}^{1}x(x-1)\,dx$$

$$+2\,\frac{(1-s)^3}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\{(1+s)^3+2(1-s)^3\}$$

$$+2\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\{1+3s+3s^2+s^3$$

$$+2(1-3s+3s^2-s^3)-2\}$$

$$=\frac{1}{6}(-s^3+9s^2-3s+1)$$

$(0<s<1)$

(4)

$$A'(s)=\frac{1}{6}(-3s^2+18s-3)$$

$$=-\frac{1}{2}(s^2-6s+1)$$

s	0		$3-2\sqrt{2}$		1
$A'(s)$		$-$	0	$+$	
$A(s)$		↘	極小	↗	

したがって

$s=3-2\sqrt{2}$ のとき

$A(s)$ は最小値をとる.