1 (1)

袋A：白2，赤3

袋B：白10，赤23

(i) A，B両方から白玉を取り出すとき

$$\frac{2}{5}\times\frac{11}{34}=\frac{11}{85}$$

(ii) A，B両方から赤玉を取り出すとき

$$\frac{3}{5}\times\frac{24}{34}=\frac{36}{85}$$

(i)，(ii) より

$$p=\frac{11}{85}+\frac{36}{85}=\frac{47}{85}$$

(2) (1)と同様にして，

$$p=\frac{2}{5}\times\frac{x+1}{x+y+1}+\frac{3}{5}\times\frac{y+1}{x+y+1}$$

$$=\frac{2x+3y+5}{5(x+y+1)}$$

これが $\frac{47}{85}$ に等しいとき，

$$\frac{2x+3y+5}{x+y+1}=\frac{47}{17}$$

$$34x+51y+85$$
$$=47x+47y+47$$
$$13x-4y=38\cdots①$$

(1)より，$x=10$，$y=23$ は

①をみたすので，

$$13\cdot10-4\cdot23=38\cdots②$$

①－②より，

$$13(x-10)-4(y-23)=0$$

$$13(x-10)=4(y-23)$$

13と4は互いに素であるから

両辺は $13\cdot4=52$ の倍数

であり，$13\cdot4k$（$k$は整数）とおける

$$\begin{cases} x-10=4k \\ y-23=13k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10+4k \\ y=23+13k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\leqq10+4k\leqq1000 \\ 1\leqq23+13k\leqq1000 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} -2.25\leqq k\leqq247.5 \\ -1.6\cdots\leqq k\leqq75.1\cdots \end{cases}$$

すなわち，

$$-1\leqq k\leqq75$$

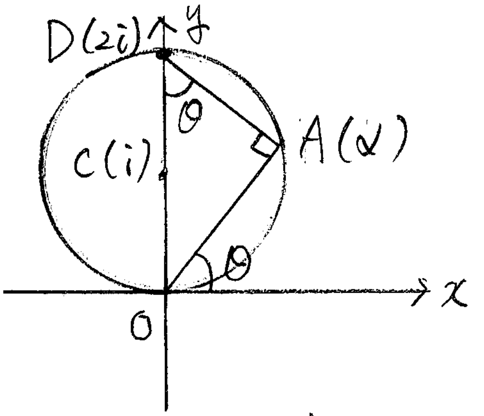
であり，$x$，$y$ の組は

77組ある。

$\boxed{2}$ $\alpha \neq 0$ , $|\alpha - i| = 1$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , $A(\alpha)$ , $B(\beta)$

(1) $C(i)$ , $D(2i)$ とする




Aは C 中心，半径1の円周上にあるので，$\angle OAD = \frac{\pi}{2}$ であり，

$\angle ODA = \frac{\pi}{2} - \angle AOD = \theta$

である．直径ODに注目すると，

$OA = 2\sin\theta$

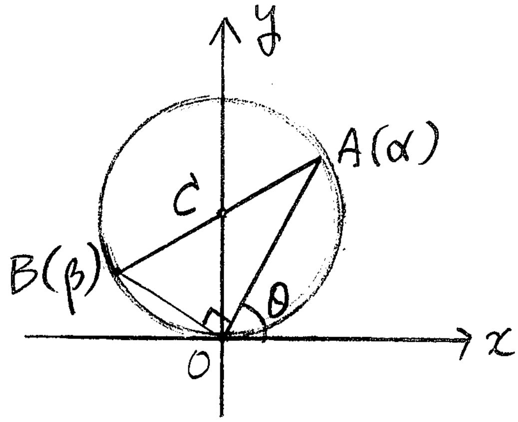
$|\alpha| = 2\sin\theta$

(2) $\beta = -\alpha + 2i$ より

$\frac{\alpha+\beta}{2} = i$

よって，ABの中点はCである

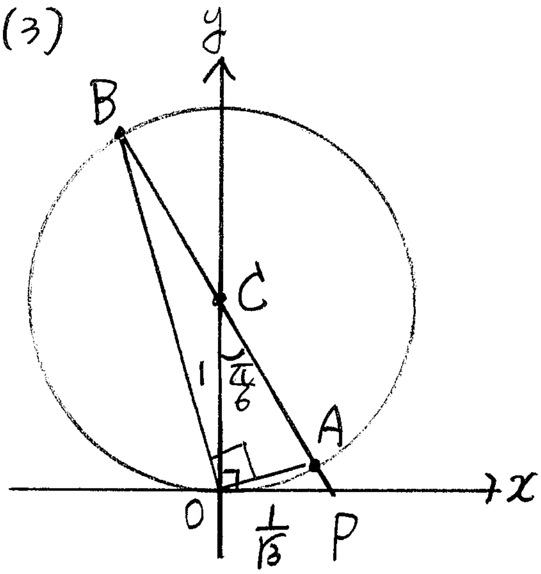
ABも直径である。




$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ より

$\arg\beta = \theta + \frac{\pi}{2}$

(3)




4点P，A，C，Bが同一直線上にあることになる．

$OP : OC = \frac{1}{\sqrt{3}} : 1 = 1 : \sqrt{3}$

より，$\angle OCP = \frac{\pi}{6}$ である．

これを中心角とみると，

円周角である

$\angle OBA = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ より

$\angle OAB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5}{12}\pi$

$CO = CA$ より

$\angle COA = \angle OAC = \angle OAB$

$= \frac{5}{12}\pi$

よって，

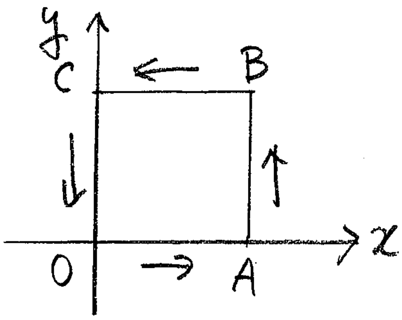
$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{12}$

注 接弦定理により

$\theta = \angle AOP = \angle OBA$

としてもよい．

$\boxed{3}$




(i) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$P(t,0,0)$, $Q(0,t,1)$

$\overrightarrow{OR} = (1-a)\overrightarrow{OP} + a\overrightarrow{OQ}$ とする

$= ((1-a)t,\ at,\ a)$

$= (0,0,a) + t(1-a,a,0)$

$R_1(0,0,a)$ と $R_2(1-a,a,a)$

を結ぶ線分を描く

(ii) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき，$u = t-1$ とおく

$P(1,u,0)$, $Q(u,1,1)$

$\overrightarrow{OR} = (1-a)\overrightarrow{OP} + a\overrightarrow{OQ}$

$= (1-a+au,\ (1-a)u+a,\ a)$

$= (1-a,a,a) + u(a,1-a,0)$

$(0 \leqq u \leqq 1)$

$R_2(1-a,a,a)$ と $R_3(1,1,a)$

を結ぶ線分を描く.

(iii) $2 \leqq t \leqq 3$ のとき，$u = 3-t$

とおく.

$P(u,1,0)$, $Q(1,u,1)$

$\overrightarrow{OR} = (1-a)\overrightarrow{OP} + a\overrightarrow{OQ}$

$= ((1-a)u+a,\ 1-a+au,\ a)$

$= (a,1-a,a) + u(1-a,a,0)$

$(0 \leqq u \leqq 1)$

$R_4(a,1-a,a)$ と $R_3(1,1,a)$

を結ぶ線分を描く

(iv) $3 \leqq t \leqq 4$ のとき，$u = 4-t$

とおく.

$P(0,u,0)$, $Q(u,0,1)$

$\overrightarrow{OR} = (1-a)\overrightarrow{OP} + a\overrightarrow{OQ}$

$= (au,\ (1-a)u,\ a)$

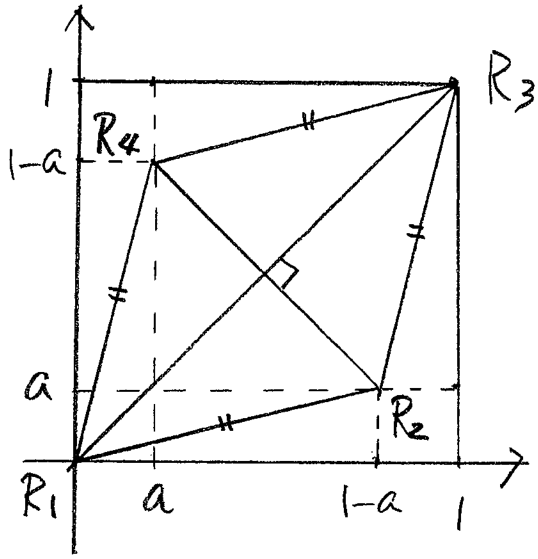
$= (0,0,a) + u(a,1-a,0)$

$R_1(0,0,a)$ と $R_4(a,1-a,a)$

を結ぶ線分を描く

(i)〜(iv) より

切り口はひし形となる.




$R_1R_3 = \sqrt{2}$

$R_2R_4 = \sqrt{2}\,|1-2a|$

ひし形 $R_1R_2R_3R_4$ の

面積を $S$ とすると

$S = \frac{1}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{2}\,|1-2a|$

$= |1-2a| = 1-2a$

(2) 求める体積を $S$ とする.

$S = |1-2a| \quad (0 \leqq a \leqq 1)$ より

$V = \int_0^1 S\,da$

$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2a)\,da$

$= 2\left[a - a^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{2}$

$\boxed{4}$ $a>0$, $A(a, 0)$

$C_1$: $x^2-4y^2=-4$

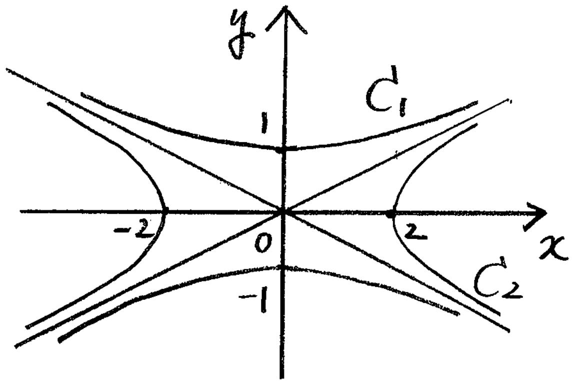
$\frac{x^2}{4}-y^2=-1$

$y^2=\frac{x^2}{4}+1 \geqq 1$

$C_2$: $x^2-4y^2=4$

$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

$y^2=\frac{x^2}{4}-1$ $(|x| \geqq 2)$




(1) $P(x, y)$, $y^2=\frac{x^2}{4}+1$

$AP^2=(x-a)^2+y^2$

$=\frac{5}{4}x^2-2ax+a^2+1$

$=\frac{5}{4}\left(x-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{a^2}{5}+1$

$x=\frac{4}{5}a$ のとき最小

$P\left(\frac{4}{5}a, \pm\sqrt{\frac{4}{25}a^2+1}\right)$

最小値は $\sqrt{\frac{a^2}{5}+1}$

(2) $P(x, y)$, $y^2=\frac{x^2}{4}-1$

$AP^2=(x-a)^2+y^2$

$=\frac{5}{4}x^2-2ax+a^2-1$

$=\frac{5}{4}\left(x-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{a^2}{5}-1$

$x \leqq -2$, $2 \leqq x$ であり, $a>0$ であるから

(i) $\frac{4}{5}a>2$ $\left(a>\frac{5}{2}\right)$ のとき

$x=\frac{4}{5}a$ のとき最小

$P\left(\frac{4}{5}a, \pm\sqrt{\frac{4}{25}a^2-1}\right)$

最小値は $\sqrt{\frac{a^2}{5}-1}$

(ii) $\frac{4}{5}a \leqq 2$ $\left(0<a \leqq \frac{5}{2}\right)$ のとき

$x=2$ のとき最小

$P(2, 0)$

最小値は $|a-2|$

(3) (i) $a > \frac{5}{2}$ のとき

$$\sqrt{\frac{a^2}{5}+1} > \sqrt{\frac{a^2}{5}-1}$$

であり，(2, 0) で最小とはならないので不適

(ii) $0 < a \leqq \frac{5}{2}$ のとき

$$\sqrt{\frac{a^2}{5}+1} \geqq |a-2|$$

であれば (2, 0) で最小となる．

$$\frac{a^2}{5}+1 \geqq a^2-4a+4$$

$$4a^2-20a+15 \leqq 0$$

$$\frac{5-\sqrt{10}}{2} \leqq a \leqq \frac{5+\sqrt{10}}{2}$$

$0 < a \leqq \frac{5}{2}$ より

$$\frac{5-\sqrt{10}}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}$$