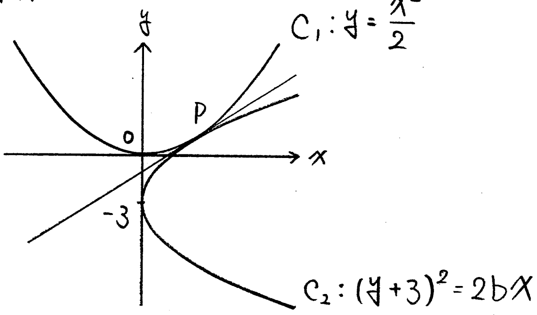
1

問1.



C_1は$y \geqq 0$の範囲にあるので，C_1, C_2の共有点は，$x>0$, $y>0$の範囲にある．

よって，PはC_2の $y+3=\sqrt{2bx}$ $(x>0)$ 上にあり，

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \text{ に対して，} \dfrac{dy}{dx} = x, \\ y = \sqrt{2bx} - 3 \ (x>0) \text{ に対して，} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{b}{2x}} \end{cases}$$

より，Pのx座標を$t(>0)$とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{t^2}{2} = \sqrt{2bt} - 3 & \cdots ① \\ t = \sqrt{\dfrac{b}{2t}} & \cdots ② \end{cases}$$

②より，$b = 2t^3$ であり，

これと①より

$$\frac{t^2}{2} = 2t^2 - 3$$

$$t^2 = 2.$$

$t>0$ より，$t=\sqrt{2}$ でありP$(\sqrt{2}, 1)$．

よって，求める接線の方程式とbの値は

$y = \sqrt{2}x - 1$ …(答)

$b = 4\sqrt{2}$ …(答)

問2.

C_2の傾き正の接線はC_2の

$y+1 = \sqrt{2bx}$ $(x>0)$ …③

の部分でC_2と接する．

C_1の点$(s, \frac{s^2}{2})$における接線の方程式は，

$$y = sx - \frac{s^2}{2}. \quad \cdots ④$$

（傾き正より），$s>0$）

③の点$(t, \sqrt{2bt}-1)$における接線の方程式は，

$$y = \sqrt{\frac{b}{2t}}x + \sqrt{\frac{bt}{2}} - 1. \quad \cdots ⑤$$

④，⑤が一致するとき，

$$\begin{cases} s = \sqrt{\dfrac{b}{2t}}, & \cdots ⑥ \\ -\dfrac{s^2}{2} = \sqrt{\dfrac{bt}{2}} - 1. & \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑥より，$t = \dfrac{b}{2s^2}$ であり，

これと⑦より，

$$-\frac{s^2}{2} = \frac{b}{2s} - 1$$

$$b = -s^3 + 2s. \quad \cdots ⑧$$

以上より，⑧を満たす$s(>0)$が少なくとも1つ存在するような$b(>0)$の値の範囲を求めればよい．

1

つまり，su平面内において，
直線：$u=b$と，$u=-s^3+2s$のグラフが$s>0$の範囲に少なくとも1つの共有点をもつような$b(>0)$の値の範囲を求めればよい．

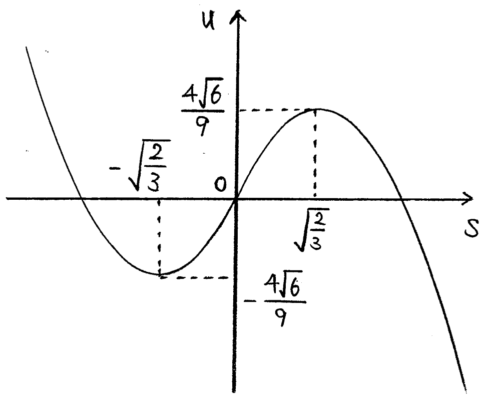
$u=-s^3+2s$に対して，

$$\frac{du}{ds}=-3s^2+2$$

より，uの増減は次の表のようになる．

s	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
$\frac{du}{ds}$	$-$	0	$+$	0	$-$
u	↘		↗		↘

よって，$u=-s^3+2s$のグラフは，次のようになる．



これと，$b>0$より，求める値の範囲は

$$0<b\leqq\frac{4\sqrt{6}}{9}.\quad\cdots(答)$$

2

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt.\ (x>0)$

問1. $0\leqq t\leqq x\ (x>0)$ において,

$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}>0$

であるから $f(x)>0$ であり, また

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}>0$

であるから, $x>0$ において $f(x)$ は単調に増加する.

以上より, $0<x_1<x_2$ ならば,

$0<f(x_1)<f(x_2)$. (証明終り)

問2.

$y=g(x)\ (g(x)>0)$ に対して,

$x=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$ ……①

である.

①の両辺を y で微分すると,

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+y^3}$$

であるから,

$g'(x)=\sqrt{1+\{g(x)\}^3}$. ……(答)

問3.

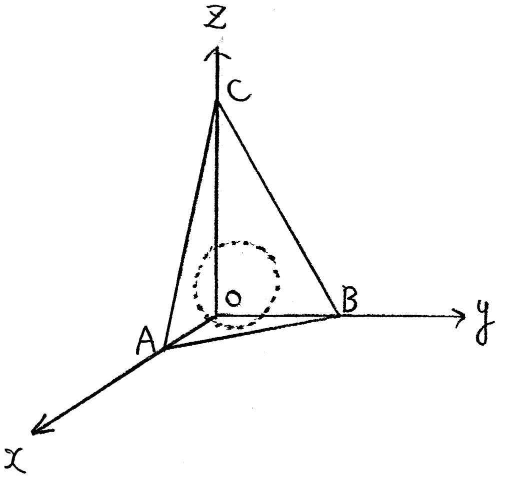
問2の結果より,

$$g''(x)=\frac{3\{g(x)\}^2\cdot g'(x)}{2\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}$$

$$=\frac{3\{g(x)\}^2\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}{2\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}$$

$$=\frac{3}{2}\{g(x)\}^2.$$ ……(答)

$\boxed{3}$



問1

Sの半径をrとする.

Pは $x>0$ かつ $y>0$ かつ $z>0$ の範囲にあり, xy平面, yz平面, zx平面との距離がいずれもrであるから, Pの座標は(r, r, r)である.

さらに, 4つの四面体

POAB, POBC, POCA, PABC

の体積の和は四面体OABCの体積であるから,

$$\frac{1}{3}(\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA+\triangle ABC)r = \frac{1}{3}\triangle OAB\cdot OC. \quad \cdots①$$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\cdot 2=\sqrt{3}-1$,

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}+1)=\sqrt{3}+1$,

$\triangle OCA=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=1$

であり,

$\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3}-1, -2, 0)$, $\overrightarrow{BC}=(0, -2, \sqrt{3}+1)$より

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(8-2\sqrt{3})(8+2\sqrt{3})-4^2}$$

$$=3$$

であるから, ①より

$$\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)r=\frac{2}{3}.$$

よって $r=2-\sqrt{3}$ であり, Pの座標は

$$(2-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}). \quad \cdots(答)$$

問2

PQ⊥(平面ABC)より,

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

であり, これよりkを実数として

$$\overrightarrow{PQ}=k(\sqrt{3}+1, 1, \sqrt{3}-1). \quad \cdots②$$

Qは平面ABC上にあるので, s, tを実数として

$$\overrightarrow{OQ}=(1-s-t)\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}. \quad \cdots③$$

②より $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+k(\sqrt{3}+1, 1, \sqrt{3}-1)$

であり, ③と成分を比較すると

$$\begin{cases} s(\sqrt{3}-1)=2-\sqrt{3}+k(\sqrt{3}+1), \\ (1-s-t)\cdot 2=2-\sqrt{3}+k \\ t(\sqrt{3}+1)=2-\sqrt{3}+k(\sqrt{3}-1). \end{cases}$$

これより

$$k=\frac{2-\sqrt{3}}{3}, \quad s=\frac{3\sqrt{3}-1}{6}, \quad t=\frac{\sqrt{3}-1}{6}.$$

よって, Qの座標は

$$\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{3}, \frac{8-4\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad \cdots(答)$$

$\boxed{4}$

問1．$x \geqq 0$ のとき $x^{p-1} \geqq 0$ であるから求める面積は

$$\int_0^s x^{p-1}dx = \left[\frac{1}{p}x^p\right]_0^s$$
$$= \frac{s^p}{p}. \quad \cdots(\text{答})$$

問2．$0^{p-1}=0$ であり、$x>0$ のとき

$$(x^{p-1})' = (p-1)x^{p-2} > 0$$

であるから、$0 \leqq y \leqq t$ を満たす y に対して

$$y = x^{p-1}$$

を満たす実数 x はただ1つ存在し、0以上である．$t=x^{p-1}$ を満たす実数 x は正であり、それを u とすると求める面積は，

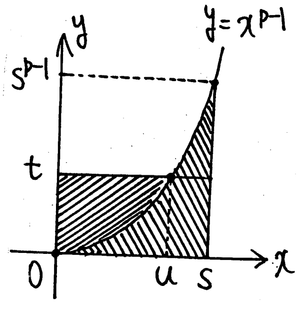
$$\int_0^t x\,dy = \int_0^u x\cdot\frac{dy}{dx}dx$$
$$= \int_0^u (p-1)x^{p-1}dx$$
$$= \left[\frac{p-1}{p}x^p\right]_0^u$$
$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)u^p$$
$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)(u^{p-1})^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}$$
$$= \frac{t^q}{q}. \quad \cdots(\text{答})$$

（注意）$p-1$ が偶数のときは $y=x^{p-1}$ のグラフは y 軸に関して対称であるが本問においては $y=x^{p-1}$ のグラフは $x \geqq 0$ においてのみ定義されていると解釈した．

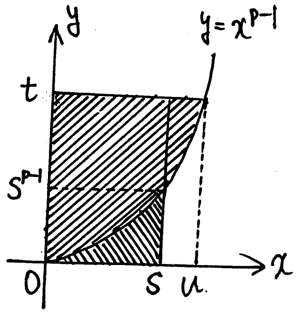
問3　$st=0$ のとき，

$$0 \leqq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$$

より、成り立つ．$s>0$，$t>0$ のとき，



$t \leqq s^{p-1}$ のとき



$s^{p-1} \leqq t$ のとき

問1，問2の面積の合計と $(0,0)$，$(s,0)$ (s,t)，$(0,t)$ を4頂点とする長方形の面積を比較して

$$st \leqq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$$

（証明終り）

問4．$a \leqq x \leqq b$ において $|f(x)| \geqq 0$，$|g(x)| \geqq 0$ であるから問3より，

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)|$$
$$\leqq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

が成り立つ．よって

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx$$
$$\leqq \int_a^b \left(\frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q\right)dx$$
$$= \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q dx$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$= 1.$$

（証明終り）

5

a, b, c, x, y, z は実数.

問1

$a^2-b^2>0$ のとき. $a^2>b^2 \geqq 0$ より $a \neq 0$.

$f(t)=(at+x)^2-(bt+y)^2$ とおく.

$$f(t)=(a^2-b^2)t^2+2(ax-by)t+(x^2-y^2)$$

より, 2次関数 $s=f(t)$ のグラフは, 下に凸の放物線であり,

$$f\left(-\frac{x}{a}\right)=-\left(-\frac{bx}{a}+y\right)^2 \leqq 0$$

より, t 軸と共有点をもつ. したがって, 2次方程式 $f(t)=0$ は実数解をもつ.

（証明終り）

問2

問1より, $f(t)=0$ が実数解をもつから,

$$\frac{(判別式)}{4} \geqq 0.$$

$$(ax-by)^2-(a^2-b^2)(x^2-y^2) \geqq 0.$$

よって,

$$(ax-by)^2 \geqq (a^2-b^2)(x^2-y^2).$$

（証明終り）

問3

$a^2-b^2-c^2>0$ のとき. $a^2>b^2+c^2 \geqq 0$ より $a \neq 0$

$g(t)=(at+x)^2-(bt+y)^2-(ct+z)^2$ とおく.

$$g(t)=(a^2-b^2-c^2)t^2+2(ax-by-cz)t+(x^2-y^2-z^2)$$

より, 2次関数 $s=g(t)$ のグラフは, 下に凸の放物線であり,

$$g\left(-\frac{x}{a}\right)=-\left(-\frac{bx}{a}+y\right)^2-\left(-\frac{cx}{a}+z\right)^2 \leqq 0$$

より, t 軸と共有点をもつ.

したがって, 2次方程式 $g(t)=0$ は実数解をもつから

$$\frac{(判別式)}{4} \geqq 0.$$

$$(ax-by-cz)^2-(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2) \geqq 0.$$

よって,

$$(ax-by-cz)^2 \geqq (a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2).$$

（証明終り）