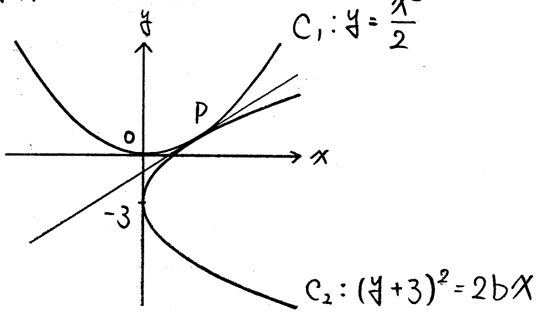
1

問1.



C_1 は $y \geqq 0$ の範囲にあるので，C_1, C_2 の共有点は，$x>0$, $y>0$ の範囲にある．

よって，P は C_2 の $y+3=\sqrt{2bx}$ $(x>0)$ 上にあり，

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{2} \text{ に対して，} \frac{dy}{dx}=x, \\ y=\sqrt{2bx}-3 \ (x>0) \text{ に対して，} \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{b}{2x}} \end{cases}$$

より，P の x 座標を $t\,(>0)$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{t^2}{2}=\sqrt{2bt}-3 & \cdots ① \\ t=\sqrt{\frac{b}{2t}} & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$b=2t^3$ であり，

これと ① より

$$\frac{t^2}{2}=2t^2-3$$

$$t^2=2.$$

$t>0$ より，$t=\sqrt{2}$ であり P$(\sqrt{2}, 1)$．

よって，求める接線の方程式と b の値は

$y=\sqrt{2}x-1$ …（答）

$b=4\sqrt{2}$ …（答）

問2.

C_2 の傾き正の接線は C_2 の

$y+1=\sqrt{2bx}$ $(x>0)$ … ③

の部分で C_2 と接する．

C_1 の点 $\left(s, \frac{s^2}{2}\right)$ における接線の方程式は，

$$y=sx-\frac{s^2}{2}. \quad \cdots ④$$

（傾き正より，$s>0$）

③ の点 $(t, \sqrt{2bt}-1)$ における接線の方程式は，

$$y=\sqrt{\frac{b}{2t}}x+\sqrt{\frac{bt}{2}}-1. \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ が一致するとき，

$$\begin{cases} s=\sqrt{\frac{b}{2t}}, & \cdots ⑥ \\ -\frac{s^2}{2}=\sqrt{\frac{bt}{2}}-1. & \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑥ より，$t=\frac{b}{2s^2}$ であり，

これと ⑦ より，

$$-\frac{s^2}{2}=\frac{b}{2s}-1$$

$$b=-s^3+2s. \quad \cdots ⑧$$

以上より，⑧ を満たす $s\,(>0)$ が少なくとも 1 つ存在するような $b\,(>0)$ の値の範囲を求めればよい．

1

つまり，su 平面内において，

直線：$u=b$ と，$u=-s^3+2s$ のグラフが $s>0$ の範囲に少なくとも1つの共有点をもつような $b\,(>0)$ の値の範囲を求めればよい．

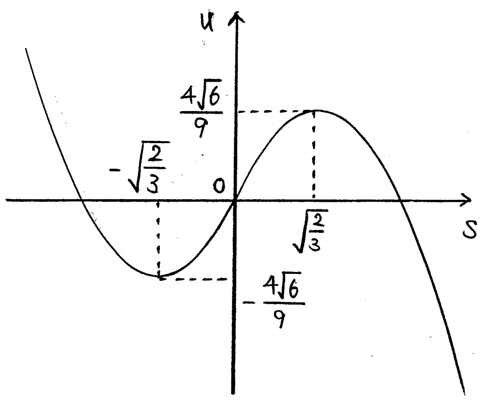
$u=-s^3+2s$ に対して，

$$\frac{du}{ds}=-3s^2+2$$

より，u の増減は次の表のようになる．

s	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
$\frac{du}{ds}$	$-$	0	$+$	0	$-$
u	↘		↗		↘

よって，$u=-s^3+2s$ のグラフは，次のようになる．



これと，$b>0$ より，求める値の範囲は

$$0<b\leqq\frac{4\sqrt{6}}{9}.\quad\cdots\text{（答）}$$

2

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt.\ (x>0)$

問1. $0 \leqq t \leqq x$ $(x>0)$ において，

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}>0$$

であるから $f(x)>0$ であり，また

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}>0$$

であるから，$x>0$ において $f(x)$ は単調に増加する．

以上より，$0<x_1<x_2$ ならば，

$0<f(x_1)<f(x_2)$．（証明終り）

問2.

$y=g(x)$ $(g(x)>0)$ に対して，

$$x=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt \quad \cdots\cdots ①$$

である．

①の両辺を y で微分すると，

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+y^3}$$

であるから，

$$g'(x)=\sqrt{1+\{g(x)\}^3}. \quad \cdots\cdots(答)$$

問3.

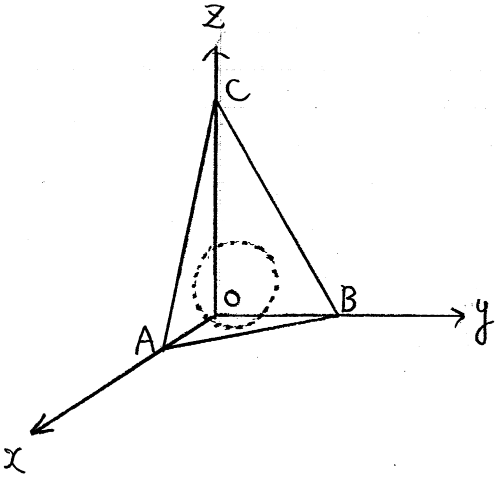
問2の結果より，

$$g''(x)=\frac{3\{g(x)\}^2\cdot g'(x)}{2\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}$$

$$=\frac{3\{g(x)\}^2\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}{2\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}$$

$$=\frac{3}{2}\{g(x)\}^2. \quad \cdots\cdots(答)$$

$\boxed{3}$



問1

Sの半径をrとする．

Pは$x>0$かつ$y>0$かつ$z>0$の範囲にあり，xy平面，yz平面，zx平面との距離がいずれもrであるから，Pの座標は(r, r, r)である．

さらに，4つの四面体

POAB, POBC, POCA, PABC

の体積の和は四面体OABCの体積であるから，

$$\frac{1}{3}(\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA+\triangle ABC)r = \frac{1}{3}\triangle OAB\cdot OC. \quad \cdots①$$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\cdot 2=\sqrt{3}-1,$$

$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}+1)=\sqrt{3}+1,$$

$$\triangle OCA=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=1$$

であり，

$\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3}-1,-2,0)$, $\overrightarrow{BC}=(0,-2,\sqrt{3}+1)$より

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(8-2\sqrt{3})(8+2\sqrt{3})-4^2}$$

$$=3$$

であるから，①より

$$\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)r=\frac{2}{3}.$$

よって$r=2-\sqrt{3}$であり，Pの座標は

$$(2-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}). \quad \cdots(答)$$

問2

PQ⊥(平面ABC)より，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

であり，これよりkを実数として

$$\overrightarrow{PQ}=k(\sqrt{3}+1, 1, \sqrt{3}-1). \quad \cdots②$$

Qは平面ABC上にあるので，s, tを実数として

$$\overrightarrow{OQ}=(1-s-t)\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}. \quad \cdots③$$

②より$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+k(\sqrt{3}+1, 1, \sqrt{3}-1)$

であり，③と成分を比較すると

$$\begin{cases} s(\sqrt{3}-1)=2-\sqrt{3}+k(\sqrt{3}+1), \\ (1-s-t)\cdot 2=2-\sqrt{3}+k \\ t(\sqrt{3}+1)=2-\sqrt{3}+k(\sqrt{3}-1). \end{cases}$$

これより

$$k=\frac{2-\sqrt{3}}{3},\ s=\frac{3\sqrt{3}-1}{6},\ t=\frac{\sqrt{3}-1}{6}.$$

よって，Qの座標は

$$\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{3}, \frac{8-4\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad \cdots(答)$$

4

$$z=\cos\frac{2\pi}{k}+i\sin\frac{2\pi}{k}.$$

問1　ド・モアブルの定理より，

$$z^m=\cos\frac{2m}{k}\pi+i\sin\frac{2m}{k}\pi,$$

$$z^n=\cos\frac{2n}{k}\pi+i\sin\frac{2n}{k}\pi$$

であるから，

$z^m=z^n$.

$\iff$「$\frac{2m}{k}\pi=\frac{2n}{k}\pi+2p\pi$（$p$：整数）と表せる」.

$\iff$「$m-n=pk$（p：整数）と表せる」.

$\iff$「$m-n$ は k の倍数」.

（証明終り）

問2　$z^{al}=z^{bl}$，　…①

$1\leqq b<a\leqq k$　…②

を満たす整数 a，b が存在すると仮定する．

問1の結果を用いると，①より，q を整数として，

$al-bl=(a-b)l=qk$

と表せる．

l と k は互いに素であるから，$a-b$ は k の倍数である．

ところが②より，

$1\leqq a-b\leqq k-1$

であるから，$a-b$ が k の倍数となることはなく矛盾する．

よって，$z^l, z^{2l}, z^{3l}, \cdots, z^{kl}$ はすべて異なる．　（証明終り）

問3　k と l は互いに素でないと仮定すると，2以上の整数 g と整数 k'，l' を用いて，

$k=gk'$

$l=gl'$

と表せる．このとき，$g\geqq 2$ より，

$1\leqq k'\leqq k-1$.

したがって，

$c-d=k'$,

$1\leqq d<c\leqq k$

を満たす整数 c，d が存在する．

このとき，

$$\begin{aligned}cl-dl&=(c-d)l\\&=k'l\\&=k'gl'\\&=kl'\end{aligned}$$

より，$cl-dl$ が k の倍数となり，問1の結果より，

$z^{cl}=z^{dl}$.

これは，$z^l, z^{2l}, z^{3l}, \cdots, z^{kl}$ がすべて異なることに反する．

以上より，k と l は互いに素である．

（証明終り）

5

a, b, c, x, y, z は実数．

問1

$a^2-b^2>0$ のとき．$a^2>b^2\geqq 0$ より $a\neq 0$．

$f(t)=(at+x)^2-(bt+y)^2$ とおく．

$$f(t)=(a^2-b^2)t^2+2(ax-by)t+(x^2-y^2)$$

より，2次関数 $s=f(t)$ のグラフは，下に凸の放物線であり，

$$f\left(-\frac{x}{a}\right)=-\left(-\frac{bx}{a}+y\right)^2\leqq 0$$

より，t 軸と共有点をもつ．したがって，2次方程式 $f(t)=0$ は実数解をもつ．

（証明終り）

問2

問1より，$f(t)=0$ が実数解をもつから，

$$\frac{(判別式)}{4}\geqq 0.$$

$$(ax-by)^2-(a^2-b^2)(x^2-y^2)\geqq 0.$$

よって，

$$(ax-by)^2\geqq(a^2-b^2)(x^2-y^2).$$

（証明終り）

問3

$a^2-b^2-c^2>0$ のとき．$a^2>b^2+c^2\geqq 0$ より $a\neq 0$

$g(t)=(at+x)^2-(bt+y)^2-(ct+z)^2$ とおく．

$$g(t)=(a^2-b^2-c^2)t^2+2(ax-by-cz)t+(x^2-y^2-z^2)$$

より，2次関数 $s=g(t)$ のグラフは，下に凸の放物線であり，

$$g\left(-\frac{x}{a}\right)=-\left(-\frac{bx}{a}+y\right)^2-\left(-\frac{cx}{a}+z\right)^2\leqq 0$$

より，t 軸と共有点をもつ．

したがって，2次方程式 $g(t)=0$ は実数解をもつから

$$\frac{(判別式)}{4}\geqq 0.$$

$$(ax-by-cz)^2-(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)\geqq 0.$$

よって，

$$(ax-by-cz)^2\geqq(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2).$$

（証明終り）