## 1

問1

$$f'(x)=3(x^2+2ax+b)$$

の符号が正から負，負から正に変わる $x$ がある条件は，2次方程式

$$x^2+2ax+b=0 \quad \cdots ①$$

が異なる2実数解をもつことであり，（判別式）$>0$ から

$$a^2-b>0. \quad \cdots(答)$$

問2

3次関数 $f(x)$ の極大値と極小値が等しくなることはないので，それらの絶対値が等しいのは，和が0である場合に限られる．

①の実数解を $\alpha$, $\beta$ とすると，$f(x)$ の極大値と極小値の和は，

$$f(\alpha)+f(\beta)$$
$$=(\alpha^3+\beta^3)+3a(\alpha^2+\beta^2)+3b(\alpha+\beta)$$
$$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+3b(\alpha+\beta).$$

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=b$$

であるから，

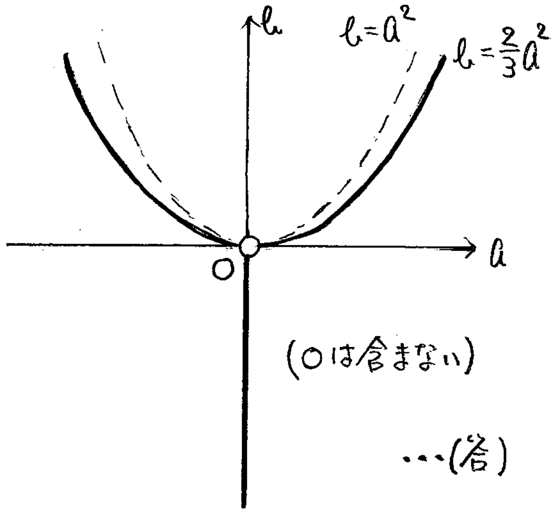
$$f(\alpha)+f(\beta)$$
$$=(-2a)^3-3b(-2a)+3a\{(-2a)^2-2b\}+3b(-2a)$$
$$=2a(2a^2-3b).$$

よって，求める条件は，（$a^2-b>0$ のもとで）

$$a=0 \text{ または } 2a^2-3b=0. \cdots(答)$$

問3

$a^2-b>0$ かつ「$a=0$ または $2a^2-3b=0$」より，$(a,b)$ の集合は次の太線部．




（Oは含まない）

…(答)

$\boxed{2}$

問1　$f(x) = x^3 - 3x^2 + px + q$

とおくと，条件 $f(b) = 0$ より，

$f(x)$ は $(x-b)$ を因数にもつ．

$p, q$ が実数であるから，

$$f(x) = (x-b)(x^2 + ux + v)$$

を満たす実数 $u, v$ が存在する．

$f(x) = 0$ が虚数解をもつので，

$u^2 - 4v < 0$ であり，虚数解は，

$$x = \frac{-u \pm \sqrt{-(u^2-4v)}\,i}{2}.$$

この一方を $\alpha$ とするとき，

他方は $\overline{\alpha}$ であり，$\alpha \neq \overline{\alpha}$

より題意は示された．（証明終り）

問2　$\alpha = r + \sqrt{3}i$ のとき，

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha} &= (r+\sqrt{3}i)(r-\sqrt{3}i)\\ &= r^2 + 3,\end{aligned}$$

$$\alpha + \overline{\alpha} = 2r$$

より，

$$\begin{aligned}12 &= (\alpha - b)(\overline{\alpha} - b)\\ &= \alpha\overline{\alpha} - b(\alpha + \overline{\alpha}) + b^2\\ &= r^2 + 3 - 2rb + b^2\\ &= (r-b)^2 + 3.\end{aligned}$$

$$r - b = 3,\ -3. \quad \cdots(答)$$

（3 および $-3$ が $r-b$ のとり得る値に確かになっていることは以下の問3の議論よりわかる．）

問3　問1の結論より，$f(x) = 0$ の3解が

$$\alpha = r + \sqrt{3}i,\ \overline{\alpha} = r - \sqrt{3}i,\ b$$

であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha + \overline{\alpha} + b = -\dfrac{-3}{1},\\ \alpha\overline{\alpha} + \alpha b + \overline{\alpha} b = \dfrac{p}{1},\\ \alpha\overline{\alpha} b = -\dfrac{q}{1}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2r + b = 3, & \cdots①\\ p = (r^2+3) + 2br, & \cdots②\\ q = -(r^2+3)b. & \cdots③\end{cases}$$

- $r - b = 3$ のとき，①より，

  $r = 2,\ b = -1.$

  このとき，②，③より，

  $p = 3,\ q = 7.$

- $r - b = -3$ のとき，①より，

  $r = 0,\ b = 3.$

  このとき，②，③より，

  $p = 3,\ q = -9.$

よって，求める組 $(p, q)$ は，

$$(p, q) = (3, 7),\ (3, -9). \cdots(答)$$

$\boxed{3}$

$$\begin{cases} a_0=1, \\ a_n=a_{n-1}+\dfrac{(-1)^n}{n!}\ (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

問1.

$m$は自然数. 漸化式により

$$a_{2m}=a_{2m-1}+\frac{(-1)^{2m}}{(2m)!}$$
$$=a_{2m-2}+\frac{(-1)^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{(-1)^{2m}}{(2m)!}$$
$$=a_{2m-2}-\frac{1}{(2m-1)!}+\frac{1}{(2m)!}$$
$$=a_{2m-2}-\frac{2m-1}{(2m)!}$$
$$<a_{2m-2}.$$

$$a_{2m+1}=a_{2m}+\frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)!}\quad\text{---}(※)$$
$$=a_{2m-1}+\frac{(-1)^{2m}}{(2m)!}+\frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)!}$$
$$=a_{2m-1}+\frac{1}{(2m)!}-\frac{1}{(2m+1)!}$$
$$=a_{2m-1}+\frac{2m}{(2m+1)!}$$
$$>a_{2m-1}.$$

（証明終り）

問2.

問1より

$$a_0>a_2>a_4>\cdots,$$
$$a_1<a_3<a_5<\cdots$$

が成り立つので,

$$\begin{cases} a_{2m}<a_0, \\ a_{2m+1}>a_1 \end{cases}\quad(m=1,2,3,\cdots)$$

である. また, (※)より

$$a_{2m+1}=a_{2m}-\frac{1}{(2m+1)!}$$
$$<a_{2m}$$

も成り立つから,

$$a_1<a_{2m+1}<a_{2m}<a_0$$

すなわち

$$0<a_{2m+1}<a_{2m}<1$$
$$(m=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つ.

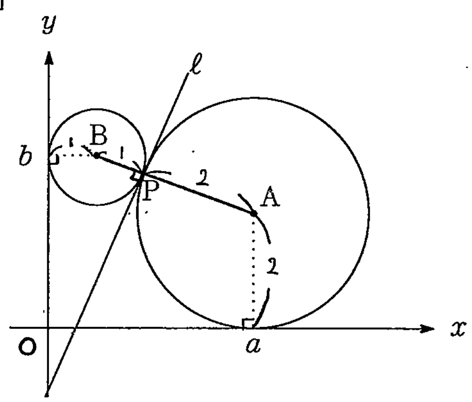
したがって,

「$n\geqq 2$のとき$0<a_n<1$」

が成り立つ.

（証明終り）

4




問1.

$A(a,2)$, $B(1,b)$ であり, $AB=3$ より

$$(a-1)^2+(b-2)^2=9. \quad \cdots ①$$

$\ell \perp AB$ より,

$$2\cdot\frac{2-b}{a-1}=-1$$

すなわち

$$a-1=2(b-2). \quad \cdots ②$$

①, ② より

$$5(b-2)^2=9.$$

$b \geqq 2$ より

$$b=2+\frac{3}{\sqrt{5}}. \quad \cdots (答)$$

これを②に代入して

$$a-1=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

より

$$a=1+\frac{6}{\sqrt{5}}. \quad \cdots (答)$$

(これは, $2<a\leqq 4$ を満たす.)

問2.

点Pは線分ABを2:1に内分するので

点Pの座標は,

$$\left(\frac{a+2}{3},\ \frac{2+2b}{3}\right)=\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}},\ 2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

よって, $\ell$ の方程式は,

$$y-\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=2\left\{x-\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

すなわち

$$y=2x-\frac{2}{\sqrt{5}}. \quad \cdots (答)$$

問3.

$\triangle OAB$ の面積を $S$ とすると,

$$S=\frac{1}{2}|ab-2\cdot 1|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\left(1+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\left(2+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)-2\right|$$
$$=\frac{9}{5}+\frac{3}{2}\sqrt{5}. \quad \cdots (答)$$