1

問1.

$$\sin x = \sin(x-\alpha)$$

とおくと,

$$\sin x - \sin(x-\alpha) = 0$$

$$2\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = 0.$$

$0<\alpha<\pi$ より $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であり,

$$\sin\frac{\alpha}{2} > 0.$$

よって,

$$\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

$$x-\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}+n\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+n\pi.\ (n\text{は整数})$$

$0<\alpha<\pi$ に注意すると, この値のうち正で最小のものは $\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}$ であり, これがPの x 座標である.

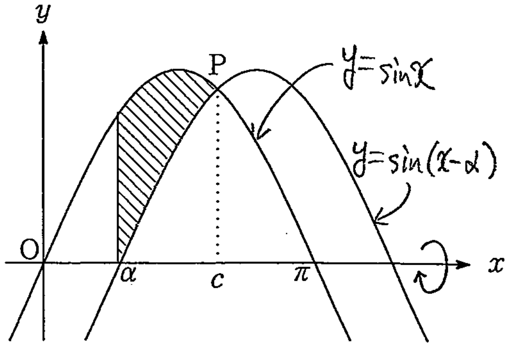
Pの y 座標は

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$$

であるから, Pの座標は

$$\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2}\right). \cdots (\text{答})$$

問2.



回転する図形は左下図の斜線部.

$$V(\alpha)$$

$$= \pi\int_\alpha^c \{\sin^2 x - \sin^2(x-\alpha)\}dx$$

$$= \pi\int_\alpha^c \left\{\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos(2x-2\alpha)}{2}\right\}dx$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin(2x-2\alpha)\right]_\alpha^c$$

$$= \pi\left\{-\frac{1}{4}\sin(\pi+\alpha) + \frac{1}{4}\sin(\pi-\alpha) + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4}(2\sin\alpha + \sin 2\alpha). \cdots (\text{答})$$

問3.

$$V'(\alpha) = \frac{\pi}{4}(2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha)$$

$$= \frac{\pi}{2}(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$$

$$= \frac{\pi}{2}(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1).$$

$V(\alpha)$ の増減表は次のようになる.

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
$V'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$V(\alpha)$		↗		↘	

よって, $V(\alpha)$ の最大値は

$$V\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{3}\pi. \cdots (\text{答})$$

2

問1　$x^3-3x^2+px+q=0$ …(＊)

が虚数 α を解にもつので，

$$\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q=0$$

が成り立つ．

両辺の共役複素数を考えると，

$$\overline{\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q}=\overline{0}.$$

p,q は実数なので，これは，

$$(\overline{\alpha})^3-3(\overline{\alpha})^2+p(\overline{\alpha})+q=0$$

と変形され，虚数 $\overline{\alpha}$ も(＊)の解であることがわかる．$\alpha\neq\overline{\alpha}$ なので題意は示された．（証明終り）

問2　α の虚部を s とおくと，

$$\alpha=r+si$$

より，$|\alpha-\overline{\alpha}|=|2si|=2|s|$

であるから，条件より，

$$|s|=\sqrt{3}.$$

このとき，

$$(2\sqrt{3})^2=|\alpha-b|^2$$
$$=|(r-b)+si|^2$$
$$=(r-b)^2+s^2$$

より，$(r-b)^2=(2\sqrt{3})^2-s^2$

$$=12-3$$
$$=9.$$

$$|r-b|=3. \quad \cdots(答)$$

問3　r,b は実数なので，

$r-b$ も実数であるから，問2より，

$$r-b=3 \text{ または } -3.$$

(＊)の3解が

$\alpha=r+si$，$\overline{\alpha}=r-si$，b

より，解と係数の関係から，

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}+b=-\dfrac{-3}{1},\\ \alpha\overline{\alpha}+\alpha b+\overline{\alpha}b=\dfrac{p}{1},\\ \alpha\overline{\alpha}b=-\dfrac{q}{1}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2r+b=3, & \cdots①\\ p=(r^2+s^2)+2rb, & \cdots②\\ q=-(r^2+s^2)b. & \cdots③\end{cases}$$

- $r-b=3$ のとき，①より，

  $r=2$，$b=-1$.

  このとき，②，③および $s^2=3$ より，

  $p=3$，$q=7$.

- $r-b=-3$ のとき，①より，

  $r=0$，$b=3$.

  このとき，②，③および $s^2=3$ より，

  $p=3$，$q=-9$.

よって，求める組 (p,q) は，

$$(p,q)=(3,7),\ (3,-9).\quad\cdots(答)$$

$\boxed{3}$

問1. k を2以上の整数として,

$$k \leqq x \leqq k+1$$

を満たす実数 x に対し,

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k}. \quad \left(\begin{array}{l}\text{等号成立条件は}\\ x=k\end{array}\right)$$

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} < \int_k^{k+1}\frac{dx}{k} = \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}.$$

また,

$$(0<)\ x-1 \leqq k$$

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{x-1}. \quad \left(\begin{array}{l}\text{等号成立条件は}\\ x=k+1\end{array}\right)$$

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{k} < \int_k^{k+1}\frac{dx}{x-1}$$

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k} < \sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x-1}$$

$$= \int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1}.$$

以上より,

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k} < \int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1}.$$

（証明終り）

問2.

$$\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2020}+\sum_{k=3}^{2019}\frac{1}{k}$$

$$> \frac{3}{2} + \int_3^{2020}\frac{dx}{x} \quad (\text{問1より})$$

$$= \frac{3}{2} + \Big[\log|x|\Big]_3^{2020}$$

$$= \frac{3}{2} + \log 2020 - \log 3$$

$$= 1.5 + 7.61 - 1.10$$

$$= 8.01. \quad \cdots①$$

$$\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{2020}\frac{1}{k}$$

$$< 1 + \int_2^{2021}\frac{dx}{x-1} \quad (\text{問1より})$$

$$= 1 + \Big[\log|x-1|\Big]_2^{2021}$$

$$= 1 + \log 2020$$

$$= 1 + 7.61$$

$$= 8.61. \quad \cdots②$$

①, ② より、求める整数部分は

8 …(答)

$\boxed{4}$ 問1. $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},3,0)$

$\overrightarrow{AP}=(p-\sqrt{3},\ q,\ r)$

$\overrightarrow{CP}=(p+\sqrt{3},\ q,\ r)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=4\end{cases}$ より

$\begin{cases}-\sqrt{3}p+3+3q=0 \quad\cdots\cdots① \\ p^2-3+q^2+r^2=4. \quad\cdots\cdots②\end{cases}$

①より, $p=\sqrt{3}(q+1)$. ……(答)

②に代入して, $r^2=-4q^2-6q+4$. ……③

③を満たす正の実数rが存在するような実数qの条件は,

$-4q^2-6q+4>0$

$2q^2+3q-2<0$

$(q+2)(2q-1)<0$

$-2<q<\frac{1}{2}$. ……(答)

このもとで, ③より

$r=\sqrt{-4q^2-6q+4}$. ……(答)

……④

問2. $\overrightarrow{BP}=(p,\ q-3,\ r)\ (\neq\vec{0})$

であるから, $O(0,0,0)$として,

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP})$

$=\left(\frac{p}{2},\ \frac{q+3}{2},\ \frac{r}{2}\right)$.

また, $\triangle ABC$の重心の座標は$(0,1,0)$であるから, l上の点Nについて,

$\overrightarrow{ON}=(0,1,t)$ (tは実数)

と表せる.

$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{p}{2},\ 1-\frac{q+3}{2},\ t-\frac{r}{2}\right)$

であり, $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{MN}$のとき,

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ より

$-p^2+2q-6-q^2+9+2rt-r^2=0$.

$r>0$ より

$t=\dfrac{p^2+q^2+r^2-2q-3}{2r}$

$=\dfrac{2-q}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}$ (②,④より)

よって, $N\left(0,\ 1,\ \dfrac{2-q}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}\right)$. ……(答)

(なお, $q=-1$とすると$\overrightarrow{MN}=\vec{0}$となるので, 以下$q\neq-1$とする.)

問3.

$f(q)=\dfrac{2-q}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}\quad\left(-2<q<\frac{1}{2}\right)$

とおくと,

$f'(q)=\dfrac{-\sqrt{-4q^2-6q+4}-(2-q)\cdot\dfrac{-8q-6}{2\sqrt{-4q^2-6q+4}}}{-4q^2-6q+4}$

$=\dfrac{11q+2}{(-4q^2-6q+4)^{\frac{3}{2}}}$.

q	(-2)	……	$-\frac{2}{11}$	……	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(q)$		$-$	0	$+$	
$f(q)$		↘		↗	

$q\neq-1$を考慮して,

求めるqの値は$q=-\frac{2}{11}$. ……(答)