文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

1

(1) $f(t)=0$ より $t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}a$ …①

であるから，題意より，

$-1 \leqq \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}a \leqq 1$ かつ $-1 \leqq \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}a \leqq 1$,

すなわち，

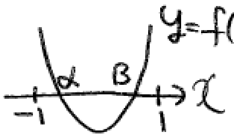
$$\begin{cases} 1-\sqrt{3} \leqq a \leqq \sqrt{3}-1, \\ \text{かつ} \\ -(1+\sqrt{3}) \leqq a \leqq 1+\sqrt{3}. \end{cases}$$

よって，aの条件は

$1-\sqrt{3} \leqq a \leqq \sqrt{3}-1$ …(答)

(2) $f(x)=0$の2解をα, β $(-1 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1)$ とおく.

（ただし $a=0$ のときは $\alpha=\beta=0$）



グラフより，

$$\begin{cases} -1 \leqq x \leqq \alpha \text{ のとき } f(x) \geqq 0, \\ \alpha \leqq x \leqq \beta \text{ のとき } f(x) \leqq 0, \\ \beta \leqq x \leqq 1 \text{ のとき } f(x) \geqq 0 \end{cases}$$

であるから，

$$S(a)=\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{-f(x)\}dx+\int_{\beta}^{1} f(x)dx$$

$$=\Big[F(x)\Big]_{-1}^{\alpha}-\Big[F(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}+\Big[F(x)\Big]_{\beta}^{1}$$

$\Big(F(x)=\int f(x)dx = \dfrac{2}{3}x^3-ax^2-a^2x+C$ （Cは定数）とおいた.$\Big)$

$$=2F(\alpha)-2F(\beta)+F(1)-F(-1)$$

$$=2\left(\frac{2}{3}\alpha^3-a\alpha^2-a^2\alpha\right)-2\left(\frac{2}{3}\beta^3-a\beta^2-a^2\beta\right)+\left(\frac{2}{3}-a-a^2\right)-\left(-\frac{2}{3}-a+a^2\right)$$

$$=-\frac{4}{3}(\beta^3-\alpha^3)+2a(\beta^2-\alpha^2)+2a^2(\beta-\alpha)+\frac{4}{3}-2a^2$$

$$=-\frac{4}{3}(\beta-\alpha)\{(\beta+\alpha)^2-\alpha\beta\}+2a(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+2a^2(\beta-\alpha)+\frac{4}{3}-2a^2$$

①より

$\beta-\alpha=\sqrt{3}|a|$, $\beta+\alpha=a$, $\alpha\beta=-\dfrac{a^2}{2}$

であるから，

$$S(a)=-\frac{4}{3}\sqrt{3}|a|\left(a^2+\frac{a^2}{2}\right)+2a\cdot\sqrt{3}|a|a+2a^2\sqrt{3}|a|+\frac{4}{3}-2a^2$$

$$=2\sqrt{3}|a|a^2-2a^2+\frac{4}{3}. \text{ …(答)}$$

(3) $0 \leqq a \leqq \sqrt{3}-1$ において，

$S(a)=2\sqrt{3}a^3-2a^2+\dfrac{4}{3}$

より，

$S'(a)=6\sqrt{3}a^2-4a=6\sqrt{3}a\left(a-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.

よって $0 \leqq a \leqq \sqrt{3}-1$ における $S(a)$ の増減は

a	0	…	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	…	$\sqrt{3}-1$
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

これと $S(-a)=S(a)$ より，求める a は

$a=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. …(答)

文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

$\boxed{2}$

(1) $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}|=0$ より,

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OR}$.

よって,

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2=|-\overrightarrow{OR}|^2$.

$|\overrightarrow{OP}|^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+|\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OR}|^2$. …①

$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OR}|=1$ より, ①から

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$. …②

同様にして

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}$. …③

②より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2$

$=|\overrightarrow{OQ}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+|\overrightarrow{OP}|^2$

$=3$.

$|\overrightarrow{PQ}|>0$ より $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{3}$.

③を用いて同様に計算すると,

$|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{RP}|=\sqrt{3}$.

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{RP}|$ であるから, 三角形PQRは正三角形である。(証明終り)

(2)

(i) 三角形ABCの重心をGとすると,

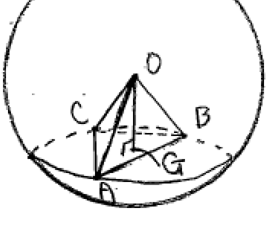
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ であるから

$|3\overrightarrow{OG}|=3|\overrightarrow{OH}|$ すなわち $|\overrightarrow{OG}|=|\overrightarrow{OH}|$ …④

平面ABC上の点Eについて

$|\overrightarrow{OE}|\geqq|\overrightarrow{OH}|$ (等号はEとHが一致するときのみ成り立つ。)

よって, ④よりGとHは一致する。



(OとGは一致することもあり得る)

OとGが異なるとき,

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ と $\overrightarrow{OG}\perp$(平面ABC)

より $|\overrightarrow{GA}|=|\overrightarrow{GB}|=|\overrightarrow{GC}|=\sqrt{1^2-|\overrightarrow{OG}|^2}$. …(＊)

((＊)はOとGが一致しても成り立つ)

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$

より $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}$.

$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}|^2=|-\overrightarrow{GC}|^2$.

$|\overrightarrow{GA}|^2+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+|\overrightarrow{GB}|^2=|\overrightarrow{GC}|^2$.

$|\overrightarrow{GA}|=|\overrightarrow{GB}|=|\overrightarrow{GC}|=a$ とすると

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{2}a^2$. …⑤

同様にして,

$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}a^2$. …⑥

⑤より

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}|^2=|\overrightarrow{GB}|^2-2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+|\overrightarrow{GA}|^2=3a^2$.

$|\overrightarrow{AB}|>0$ より $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}a$.

⑥を用いて同様に計算すると,

$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}a$.

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$ より三角形ABCは正三角形である。(証明終り)

(ii) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|=0$ より

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

よって, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}$ と $|-\overrightarrow{OD}|=1$ より

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=1$. …⑦

$|\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{3}$ より $3|\overrightarrow{OH}|=1$ であるから, ⑦より

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=3|\overrightarrow{OH}|$.

したがって(i)より三角形ABCは正三角形である。

また, Hは三角形ABCの重心Gと一致し,

$|\overrightarrow{HA}|=|\overrightarrow{HB}|=|\overrightarrow{HC}|=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{HA}|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

さらに $\overrightarrow{OD}=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-3\overrightarrow{OH}$ より,

$AD=\sqrt{AH^2+DH^2}=\sqrt{AH^2+(4OH)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

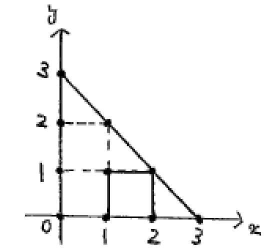
であり, 同様にして $BD=CD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ である。

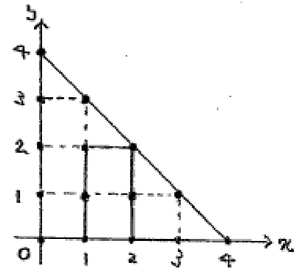
よって四面体ABCDはすべての辺の長さが等しいから正四面体である。(証明終り)

文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

3

(1) $n=3$ のときの D.　　$n=4$ のときの D.





各図において，Dに含まれる長方形を数え

$R(3)=5$，$R(4)=15$．…(答)

(2) $n=1$ のとき，$R(1)=S(1)=0$．

以下，$n \geqq 2$ で考える．

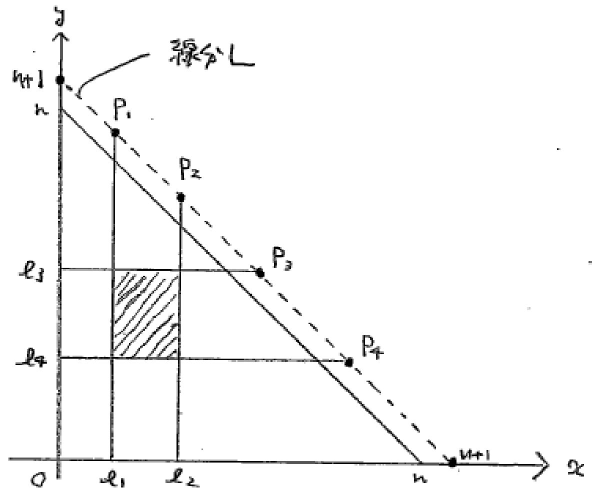
1つの長方形は，x軸に平行な直線を2本，y軸に平行な直線を2本決めることで得られる．

ここで，線分 L：$x+y=n+1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上にある $n+2$ 個の格子点を考える．

これらの $n+2$ 個の点から4個を選び x座標の小さいものから順に P_1, P_2, P_3, P_4 とする．

P_1, P_2 を通り，y軸に平行な直線をそれぞれ l_1, l_2 とし，P_3, P_4 を通り x軸に平行な直線をそれぞれ l_3, l_4 とする．

これらの4直線 l_1, l_2, l_3, l_4 によってDに含まれる長方形が1つ得られる．



特に，1つの辺がx軸上にある長方形は，P_4 を $(n+1, 0)$ に決めたときに得られる．

よって，線分L上の残りの $n+1$ 個の格子点から3個を選ぶことを考えて，

$$S(n) = {}_{n+1}C_3 = \frac{1}{6}(n+1)n(n-1).\quad \cdots(答)$$

($n=1$ でも成立)

(3) 線分L上の $n+2$ 個の格子点から4個を選ぶことを考えて，

$$R(n) = {}_{n+2}C_4 = \frac{1}{24}(n+2)(n+1)n(n-1).\quad \cdots(答)$$

($n=1$ でも成立)

(4) $R(n)=1001$ より，

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)n(n-1) &= 24 \times 1001\\ &= 2^3 \cdot 3 \times 7 \cdot 11 \cdot 13\\ &= 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11.\end{aligned}$$

これと，$\{R(n)\}$ は増加数列であることをふまえ，$n=12$．…(答)