理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

1

(1)　$ax-by=1$ が領域 $x>0$, 領域 $x<0$ の両方と共有点をもつことから,

$$b \neq 0.$$

このとき,

$$ax-by=1 \iff y=\frac{ax-1}{b}$$

であり, $x^2-y^2=1$ との共有点において,

$$x^2-\left(\frac{ax-1}{b}\right)^2=1.$$

整理して,

$$(a^2-b^2)x^2-2ax+(b^2+1)=0. \quad \cdots(*)$$

これが正の解と負の解をもつ条件を求めればよい.

$a^2-b^2 \neq 0$ が必要で, その下で, 求める条件は,

$$\frac{b^2+1}{a^2-b^2}<0.$$

$$a^2-b^2<0.$$

すなわち,

$$|a|<|b|. \quad \cdots(答)$$

(2)　(1) のとき, P, Q の x 座標を α, β とすると,

$$\alpha>0>\beta$$

であり, また α, β は $(*)$ の 2 解である.

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= \left(\frac{2a}{a^2-b^2}\right)^2-4\cdot\frac{b^2+1}{a^2-b^2} \\ &= \frac{4a^2-4(a^2-b^2)(b^2+1)}{(a^2-b^2)^2} \\ &= \left(\frac{2b}{b^2-a^2}\sqrt{b^2-a^2+1}\right)^2.\end{aligned}$$

$$\alpha-\beta=\frac{2|b|}{b^2-a^2}\sqrt{b^2-a^2+1}.$$

直線 $ax-by=1$ は, ベクトル (b, a) と平行であるから,

$$\begin{aligned}PQ &= \frac{2|b|}{b^2-a^2}\sqrt{b^2-a^2+1}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|} \\ &= \frac{2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2-a^2+1)}}{b^2-a^2}.\end{aligned}$$

また, 直線 PQ: $ax-by-1=0$ と $A(a, b)$ の距離を d とすると,

$$d=\frac{|a^2-b^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である.

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}PQ\cdot d \\ &= \frac{(b^2-a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{b^2-a^2}. \quad \cdots(答)\end{aligned}$$

(3)　$b^2-a^2=t$ とする. $t>0$.

$$S^2=\frac{(t+1)^3}{t^2}=t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}$$

より

$$\frac{d}{dt}S^2=1-\frac{3}{t^2}-\frac{2}{t^3}=\frac{(t+1)^2(t-2)}{t^3}$$

であり, S^2 の増減は次のようになる.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$\frac{d}{dt}S^2$		$-$	0	$+$
S^2		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

表より, S の最小値は,

$$\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}. \quad \cdots(答)$$

また, そのときの a, b の条件は,

$$b^2-a^2=2. \quad \cdots(答)$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

2

3つの数 $2,\ m^2+1,\ m^4+1$ が相異なることから $m^2+1 \neq 2$，すなわち

$$m \neq 1 \quad \cdots (*)$$

である．

(1)　(*)より $m \geqq 2$ であるから

$$2 < m^2+1 < m^4+1. \cdots ①$$

以下，3つの不等式

(ア)　$2^2 < (m^2+1)(m^4+1)$

(イ)　$(m^2+1)^2 < 2(m^4+1)$

(ウ)　$(m^4+1)^2 < 2(m^2+1)$

について調べる．

(ア)について

①より　$2\cdot 2 < (m^2+1)(m^4+1)$

なので成り立つ．

(イ)について

$$2(m^4+1)-(m^2+1)^2$$
$$=(m^2-1)^2$$
$$>0 \quad ((*)より)$$

なので成り立つ．

(ウ)について

①より　$(m^4+1)\cdot(m^4+1) > 2\cdot(m^2+1)$

なので成り立たない．

以上(ア)，(イ)，(ウ)より求める a の値は

$$a = 2,\ m^2+1. \cdots (答)$$

(2)　$x,\ y$ が正の整数のとき，$x+y$，$x^2+2xy+2y^2$ はいずれも正の整数である．さらに

$$2 \leqq x+y < (x+y)^2,$$
$$x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2 > (x+y)^2$$

が成り立つ．

そこで，(1)を用いると，等式をみたす正の整数 $x,\ y$ に対して2数 $x+y,\ x^2+2xy+2y^2$ の組は

$$(x+y,\ x^2+2xy+2y^2) = (2,\ (m^2+1)(m^4+1)),$$
$$(m^2+1,\ 2(m^4+1)),$$
$$(2(m^2+1),\ m^4+1)$$

のいずれかに限られる．以下，それぞれについて調べる．

(i)　$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ② \\ x^2+2xy+2y^2=(m^2+1)(m^4+1) & \cdots ③ \end{cases}$ のとき，

②より　$x=y=1$．

このとき③の左辺は5となるが

$m \geqq 2$ より　$(m^2+1)(m^4+1) \geqq 5\cdot 17 > 5$

なので，③は成り立たない．

(ii)　$\begin{cases} x+y=m^2+1 & \cdots ④ \\ x^2+2xy+2y^2=2(m^4+1) & \cdots ⑤ \end{cases}$ のとき，

⑤より　$(x+y)^2+y^2=2(m^4+1)$．

④を代入して　$(m^2+1)^2+y^2=2(m^4+1)$

$$y^2=(m^2-1)^2.$$

$m \geqq 2,\ y>0$ より　$y=m^2-1$

このとき　$x=2$．

(iii)　$\begin{cases} x+y=2(m^2+1) & \cdots ⑥ \\ x^2+2xy+2y^2=m^4+1 & \cdots ⑦ \end{cases}$ のとき，

⑦より　$(x+y)^2+y^2=m^4+1$

⑥を代入して　$4(m^2+1)^2+y^2=m^4+1$

$$y^2=-3m^4-8m^2-3 \quad \cdots ⑧$$

⑧の右辺は負なので，⑧をみたす y は存在しない．

以上(i)，(ii)，(iii)より求める $x,\ y$ は

$$x=2,\quad y=m^2-1. \quad \cdots (答)$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

$\boxed{3}$ (1) $F(\frac{\pi}{2})=0$. 以下，$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ で考える。
$f(x)$ は閉区間 $[0, 2\pi]$ で連続，
開区間 $(0, 2\pi)$ で微分可能なので，
平均値の定理から，

$$\frac{f(2\pi - x) - f(\pi + x)}{(2\pi - x) - (\pi + x)} = f'(c_1) \quad \cdots ①$$

$$\frac{f(\pi - x) - f(x)}{(\pi - x) - x} = f'(c_2) \quad \cdots ②$$

（ただし，c_1，c_2 は，$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ より，
$\pi + x < c_1 < 2\pi - x$
$x < c_2 < \pi - x$ ）
と表される。①，② より，

$$F(x) = (\pi - 2x)\left(f'(c_1) - f'(c_2)\right)$$

$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ より，$\pi - 2x > 0$
また，$x < \pi - x \leqq \pi + x < 2\pi - x$ より
$c_1 > c_2$ であり，$f''(x) > 0$ であるから，
$f'(x)$ は単調増加であり，$f'(c_1) - f'(c_2) > 0$
以上から，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$
（証明終り）

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\, dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\cos x\, dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(x)\cos x\, dx$$

ここで，

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\, dx,\quad B = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\, dx,$$

$$C = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\cos x\, dx,\quad D = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(x)\cos x\, dx$$

とおく。
B において，$x = \pi - s$ とおくと，

$$B = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - s)\cos(\pi - s)(-ds)$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - s)\cos s\, ds$$

C において，$x = \pi + t$ とおくと，

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + t)\cos(\pi + t)\, dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + t)\cos t\, dt$$

D において，$x = 2\pi - u$ とおくと，

$$D = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi - u)\cos(2\pi - u)(-du)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi - u)\cos u\, du$$

以上から，

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx = A + B + C + D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\, dx \quad \cdots ③$$

ここで，(1) より $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$，
$0 \leqq \cos x \leqq 1$ より，$F(x)\cos x \geqq 0$.
よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\, dx \geqq 0 \quad \cdots ④$$

したがって，③，④ より，

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx \geqq 0$$ （証明終り）

(3) $g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とする。

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\, dx = \Big[G(x)\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} G(x)\cos x\, dx$$

$$= -\int_0^{2\pi} G(x)\cos x\, dx$$

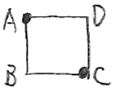
$-G(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第2次導関数 $-G''(x) = -g'(x)$ をもち，
$-G''(x) > 0$ をみたしていることから，
(2) より，

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\, dx = \int_0^{2\pi} (-G(x))\cos x\, dx \geqq 0$$

となり，与えられた不等式は成り立つ
（証明終り）

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

$\boxed{4}$



1, 4の目が出たとき、反時計回りに1つ進む (+1とする)
2, 5の目が出たとき、時計回りに1つ進む (−1とする)
3, 6の目が出たとき、その場にとどまる (0とする)

(1) 2回目で終了するのは、
$(+1, -1)$, $(-1, +1)$ と進んだとき.

よって $P_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 = \frac{2}{9}$ …(答)

3回目で終了するのは、
$(0, +1, -1)$, $(0, -1, +1)$, $(+1, 0, +1)$, $(-1, 0, -1)$
と進んだとき.

よって. $P_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 4 = \frac{4}{27}$ …(答)

(2) n回目($n = 0, 1, 2, \cdots$)の操作後に、コマが(AとC)または(BとD)にある確率をa_n
隣接2頂点にある確率をb_n
とする.

$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$ …①

$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$ …②

②より、$a_n = \frac{3}{2}b_{n+1} - \frac{1}{2}b_n$.

これと①より

$b_{n+2} - \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n = 0$ …③

ここで、$\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$, $\beta = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ とすると、③は、

$b_{n+2} - \alpha b_{n+1} = \beta(b_{n+1} - \alpha b_n)$,

$b_{n+2} - \beta b_{n+1} = \alpha(b_{n+1} - \beta b_n)$.

と変形できる. これと、$b_0 = 0$, $b_1 = \frac{2}{3}$ より

$b_{n+1} - \alpha b_n = \beta^n(b_1 - \alpha b_0) = \frac{2}{3}\beta^n$,

$b_{n+1} - \beta b_n = \alpha^n(b_1 - \beta b_0) = \frac{2}{3}\alpha^n$.

よって、

$(\beta - \alpha)b_n = \frac{2}{3}(\beta^n - \alpha^n)$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}b_n = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n\right\}$

$b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n\right\}$.

$n \geqq 1$のとき、
ちょうどn回目で終了するのは、$n-1$回目で隣接2頂点にあり、n回目に$\frac{1}{3}$の確率で重なるとき.

$P_n = \frac{1}{3}b_{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}$ …(答)

(3) $P_{n+1} - P_n = \frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} - 1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3} - 1\right)\right\}$

$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{3}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{3}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$= \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}}{3^{n+1}}\left\{(1+\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1} - (\sqrt{2}-1)\right\}$

$n = 2$ のとき、$P_3 - P_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{3^3}\left\{-2(\sqrt{2}-1)\right\} < 0$

$n \geqq 3$ のとき、

$\left|(1+\sqrt{2})\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right| = \left|(1-\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-2}\right| < |1-\sqrt{2}|$

であるから、

$(1+\sqrt{2})\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1} - (\sqrt{2}-1) < 0$.

よって、$n \geqq 2$ のとき$\{P_n\}$は単調減少. よって

$P_{2m} > P_{2m+1}$ … $\circledast$ (mは正の整数)

(ア) $N = 2M$のとき (Mは正の整数)

$\left[\frac{N}{2}\right] = M$, $\left[\frac{N+1}{2}\right] = M$.

$M \geqq 2$のとき、
$m = 1, 2, \cdots, M-1$ で$\circledast$の辺々を加えて、

$\sum_{m=1}^{M-1} P_{2m} > \sum_{m=1}^{M-1} P_{2m+1}$

$P_{2M} > 0$, $P_1 = 0$ より、

$\sum_{m=1}^{M} P_{2m} > \sum_{m=1}^{M-1} P_{2m} > \sum_{m=1}^{M} P_{2m-1}$

よって、$\sum_{m=1}^{M} P_{2m} > \sum_{m=1}^{M} P_{2m-1}$ (これは$M=1$でも成り立つ)

$\boxed{4}$の解答つづき

(イ) $N=2M-1$ のとき (Mは2以上の整数)

$$\left[\frac{N}{2}\right]=M-1,\quad \left[\frac{N+1}{2}\right]=M$$

$m=1, 2, \cdots, M-1$ で※の辺々を加えて、

$$\sum_{m=1}^{M-1} p_{2m} > \sum_{m=1}^{M-1} p_{2m+1}$$

$p_1=0$ より、

$$\sum_{m=1}^{M-1} p_{2m} > \sum_{m=1}^{M} p_{2m-1}$$

(ア), (イ) いずれの場合も、

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

が成り立つ。　　　　(証明終り)