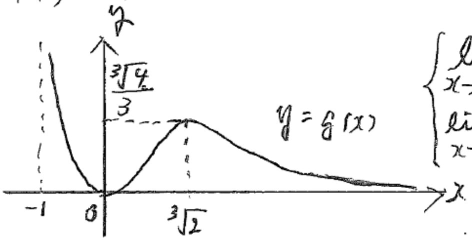
全学科

$\boxed{1}$ (1) $f'(x)=\dfrac{ke^{kx}\sqrt{x^3+1}-e^{kx}\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1}=\dfrac{e^{kx}(2kx^3-3x^2+2k)}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}$. …（答）

(2) $g'(x)=\dfrac{2x(x^3+1)-x^2\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}=\dfrac{-x(x^3-2)}{(x^3+1)^2}$

$x>-1$ における増減表は,

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow(0)$



$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to -1+0} g(x)=\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=0.\end{cases}$

極小値 $g(0)=0$, 極大値 $g(\sqrt[3]{2})=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ …（答）

(3) $x>-1$ において $f'(x)=0$ となるのは,

$2kx^3-3x^2+2k=0$

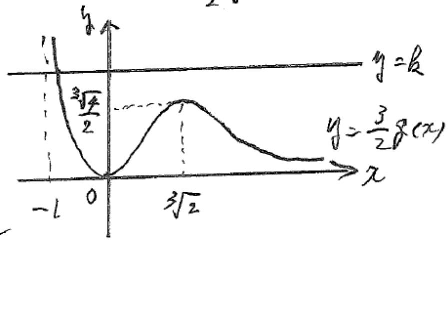
$k=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{x^3+1}=\dfrac{3}{2}g(x)$. (2)のグラフを用いて,

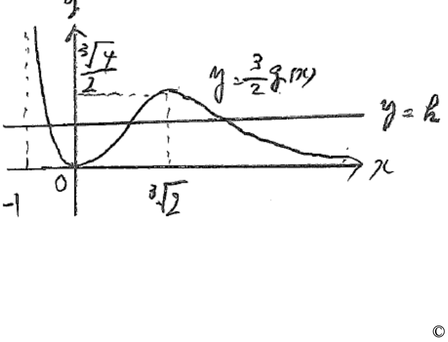
$\left.\begin{array}{lll} k>\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} & \text{のとき} & 1\text{個} \\ k=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} & \text{のとき} & 2\text{個} \\ 0<k<\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} & \text{のとき} & 3\text{個} \\ k=0 & \text{のとき} & 1\text{個} \\ k<0 & \text{のとき} & 0\text{個} \end{array}\right\}$ …（答）

(4) $f'(x)=\dfrac{e^{kx}\left(k-\dfrac{3}{2}g(x)\right)}{\sqrt{x^3+1}}$ より,

$\left.\begin{array}{lll} k\geqq\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} & \text{のとき} & 1\text{個} \\ 0<k<\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} & \text{のとき} & 3\text{個} \\ k\leqq 0 & \text{のとき} & 0\text{個} \end{array}\right\}$ …（答）

［ $f(x)$が極値をとるのは $f'(x)$の符号が変化するときであり,
このとき kと $\dfrac{3}{2}g(x)$の大小を次のグラフから読みとって, 上の結果を得る.





］

名古屋工業大学　（前期） 2 / 5

全学科

$\boxed{2}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 5y_n, & \cdots ① \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n. & \cdots ② \end{cases}$$

(1) ①, ②より

$$x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2 = (2x_n + 5y_n)^2 - 5(x_n + 2y_n)^2$$
$$= -(x_n^2 - 5y_n^2).$$

$x_1 = 2,\ y_1 = 1$ より

$$x_n^2 - 5y_n^2 = (x_1^2 - 5y_1^2)(-1)^{n-1}$$
$$= \{2^2 - 5(-1)^2\}(-1)^{n-1}$$
$$= (-1)^n. \quad \cdots (答)$$

(2) (P_k) が成り立つ，すなわち，

$$x_k \geqq 2y_k, \text{ かつ } y_k \geqq 4^{k-1} \quad \cdots ③$$

が成り立つとする．ここで，

$$x_{k+1} - 2y_{k+1} = (2x_k + 5y_k) - 2(x_k + 2y_k)$$
$$= y_k$$
$$\geqq 4^{k-1}$$
$$\geqq 0. \ (k\text{は自然数より})$$

よって，　$x_{k+1} \geqq 2y_{k+1}.$

また，②，③より

$$y_{k+1} = x_k + 2y_k \geqq 4y_k$$
$$\geqq 4 \cdot 4^{k-1}$$
$$= 4^k.$$

よって，　$y_{k+1} \geqq 4^k.$

以上より　(P_k) が成り立つならば (P_{k+1}) は成り立つ　（証明終り）

(3) (1)から，

$$x_n^2 - 5y_n^2 = (-1)^n.$$

$y_n \geqq 4^{n-1}$ より　$\left|\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2 - 5\right| = \left|\dfrac{(-1)^n}{y_n^2}\right| \leqq \left|\dfrac{(-1)^n}{(4^{n-1})^2}\right| = \left|16\left(-\dfrac{1}{16}\right)^n\right| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

これより　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 - 5\right| = 0$

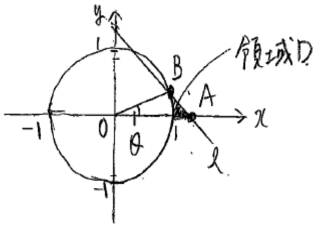
$x_1 = 2,\ y_1 = 1$，漸化式の形から　$x_n > 0$，$y_n > 0$ であるから $\dfrac{x_n}{y_n} > 0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{5}$　…(答)

全学科

$\boxed{3}$ 領域D: $\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1 \\ y \leqq -x+\sqrt{2}t \\ 0 \leqq y \leqq x \end{cases}$

は図の斜線部.



(1) $B(\cos\theta, \sin\theta)$ は l 上の点であるから,

$\sin\theta = -\cos\theta + \sqrt{2}t$

よって, $t = \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{2}}$ ...(答)

(2) 点Aについて,

$0 = -x + \sqrt{2}t$

$x = \sqrt{2}t$

したがって,

$S(t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}t \cdot \sin\theta - \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \theta$

これと(1)の結果より,

$S(t) = \dfrac{1}{2}\{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)-\theta\}$ ...(答)

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} S(t)dt$

について, $t = \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{2}} = \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より,

$\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{2}}$, $\begin{array}{c|c} t & \frac{1}{\sqrt{2}} \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$ だから,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} S(t)dt$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)-\theta\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sqrt{2}}\{\sin\theta(2\cos^2\theta-1)-\theta(\cos\theta-\sin\theta)\}d\theta$ ...①

ここで,

$\displaystyle\int\theta(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$

$\displaystyle= \theta(\sin\theta+\cos\theta)-\int(\sin\theta+\cos\theta)d\theta$

$= \theta(\sin\theta+\cos\theta)+\cos\theta-\sin\theta+C_0$ (C_0は積分定数)

であるから, ①より

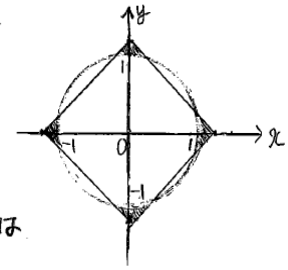
$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} S(t)dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\cos\theta-\theta(\sin\theta+\cos\theta)-\cos\theta+\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-1\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\right)-\dfrac{\pi}{4}\cdot\sqrt{2}+1\right\}$

$= \dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}-\dfrac{\pi}{8}$ ...(答)

(4) 立体Kの, 平面 $z=1-t$ における断面を考える.

$\begin{cases} 0 \leqq 1-t \leqq 1 \\ |y| \leqq -|x|+\sqrt{2}t \\ x^2+y^2 \geqq 1 \end{cases}$



断面は図の斜線部分.

断面が存在するtの範囲は

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1$

すなわち, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq 1-z \leqq 1$ より, $0 \leqq z \leqq 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

対称性を考えて, 断面の面積は, (2)の$S(t)$を用いて,

$8S(t)$.

よって, 体積は,

$\displaystyle= \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} 8S(t)\cdot dz$

$\displaystyle= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8S(t)\cdot(-dt)$ ($dz=-dt$ より)

$\displaystyle= 8\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} S(t)dt$

$= \dfrac{4+4\sqrt{2}}{3}-\pi$. ...(答)

全学科

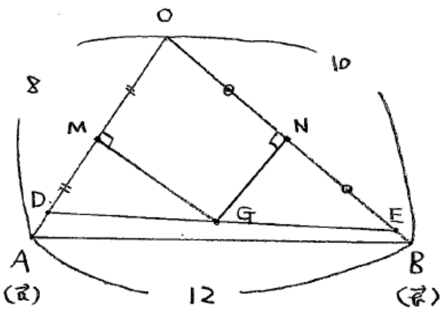
$\boxed{4}$

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=12^2$ より,

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=12^2$.

$10^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+8^2=12^2$.

よって, $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$. …(答)



(2) $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{8^2\cdot10^2-10^2}$

$=15\sqrt{7}$. …(答)

(3) OAの中点をM, OBの中点をNとする.

外心Gは各辺の垂直二等分線の交点より,

$\begin{cases} MG\perp OA, \\ NG\perp OB \end{cases}$ すなわち, $\begin{cases} \overrightarrow{MG}\cdot\vec{a}=0, \\ \overrightarrow{NG}\cdot\vec{b}=0. \end{cases}$ …①

ここで, $\overrightarrow{OG}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ (α, βは実数) とおくと, ①は

$\begin{cases} \left\{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\beta\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}=0, \\ \left\{\alpha\vec{a}+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0 \end{cases}$ すなわち, $\begin{cases} 32\alpha+5\beta=16, \\ \alpha+10\beta=5. \end{cases}$

よって, $\alpha=\frac{3}{7}$, $\beta=\frac{16}{35}$ であるから, $\overrightarrow{OG}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{16}{35}\vec{b}$. …(答)

(4) $\overrightarrow{OD}=x\vec{a}$ $(0<x\leqq1)$ である. 直線DGと辺OBの交点をEとする.

$\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OG}$ (tは実数)

$=\left\{x-\left(x-\frac{3}{7}\right)t\right\}\vec{a}+\frac{16}{35}t\vec{b}$

において, Eは辺OB上より

$x-\left(x-\frac{3}{7}\right)t=0$ …② かつ

$0\leqq\frac{16}{35}t\leqq1$ …③

をみたす実数tが存在する.

②より $x\neq\frac{3}{7}$ であり, $t=\frac{x}{x-\frac{3}{7}}$. これを③に代入し

$0\leqq\frac{16}{5}\cdot\frac{x}{7x-3}\leqq1$.

$x>0$ より $7x-3>0$ が必要で, このもとで上式は

$0\leqq16x\leqq5(7x-3)$

となり, これを解くと, $x\geqq\frac{15}{19}$.

$0<x\leqq1$ とあわせ, 求める範囲は $\frac{15}{19}\leqq x\leqq1$. …(答)

全学科

$\boxed{4}$の解答つづき

〈5〉 (4)より，$\frac{15}{19} \leqq x \leqq 1$ …④ のもとで $\overrightarrow{OE} = \frac{16}{5} \cdot \frac{x}{7x-3}\vec{b}$.

よって，三角形 ODE の面積を T とおくと，

$$T = \frac{OD}{OA} \cdot \frac{OE}{OB} \cdot S$$
$$= x \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{x}{7x-3} S$$
$$= \frac{16}{5} S \cdot \frac{x^2}{7x-3} .$$

ここで，$f(x) = \frac{x^2}{7x-3}$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{2x(7x-3) - 7x^2}{(7x-3)^2} = \frac{x(7x-6)}{(7x-3)^2}$$ より，

④における $f(x)$ の増減は，

x	$\frac{15}{19}$	…	$\frac{6}{7}$	…	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

以上より，T の最小値は

$$\frac{16}{5} \cdot S \cdot f\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{16}{5} \cdot 15\sqrt{7} \cdot \frac{12}{49} = \frac{576\sqrt{7}}{49}$$ …（答）

であり，このときの x の値は，$x = \frac{6}{7}$.　…（答）