数学 数学Ⅰ，数学Ａ 数学Ⅱ，数学Ｂ 数学Ⅲ

（工 学 部）

令和２年度入学試験問題

解 答 紙

（５枚のうち１枚目）

受験番号

受験番号

61

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔１〕（30点）

〔１〕の採点

(1) $f(x) = x - \log x$ とおくと

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

であるから，$x>0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

よって，$x>0$ のとき $f(x)>0$ すなわち $\log x < x$ が成り立つ．（証明終り）

(2) $x>0$ のとき $ax^n = \log x \iff \dfrac{\log x}{x^n} = a$

ここで $g(x) = \dfrac{\log x}{x^n}$ とおくと．

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^n - (\log x)\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{1-n\log x}{x^{n+1}}$$

であるから，$x>0$ における $g(x)$ の増減は次のようになる

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$

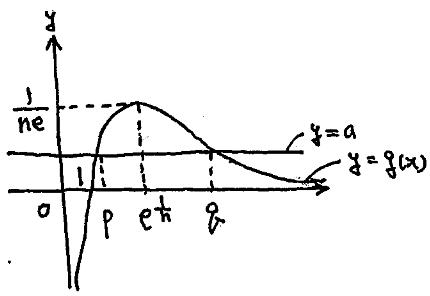
また

$$\lim_{x\to+0} g(x) = -\infty$$

さらに $x>1$ のとき (1) より $0 < \dfrac{\log x}{x} < 1$ すなわち $0 < \dfrac{\log x}{x^n} < \dfrac{1}{x^{n-1}}$ $(n \geqq 2)$ であり，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{n-1}} = 0$ であるから，

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$



よって，$y=g(x)$ と $y=a$ が異なる２点で交われはよいから，

$$0 < a < \frac{1}{ne} \cdots（答）$$

(3) $h(x) = \log x$ とおくと

$$h'(x) = \frac{1}{x}$$

であるから，$(0<)\, p < q$ について，平均値の定理より

$$\frac{1}{q} < \frac{h(q)-h(p)}{q-p} < \frac{1}{p}$$

が成り立ち，$h(p) = \log p = ap^n$，$h(q) = \log q = aq^n$ であるから

$$\frac{1}{q} < \frac{a(q^n-p^n)}{q-p} < \frac{1}{p} \quad \text{すなわち，} \quad p < \frac{q-p}{a(q^n-p^n)} < q$$

が成り立つ．（証明終り）

数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ

（工　学　部）

令和２年度入学試験問題

解　答　紙

（５枚のうち２枚目）

受験番号

受験番号

62

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔２〕（30点）　〔２〕の採点

(1) $f_n\left(x+\frac{k}{2n}\right)=1-\sqrt{5}\left|\sin\left\{2n\pi\cdot\left(x+\frac{k}{2n}\right)\right\}\right|$ $(k=1,2,\cdots,2n)$

$=1-\sqrt{5}\left|\sin(2n\pi x+k\pi)\right|$

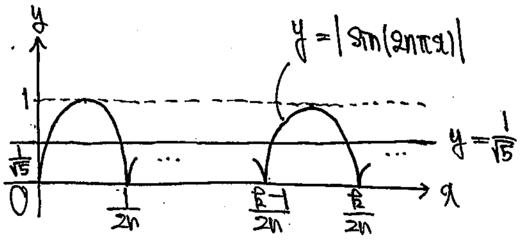
$=1-\sqrt{5}\left|\sin(2n\pi x)\right|$

$=f_n(x).$

よって，任意の実数xに対して$f_n(x)=f_n\left(x+\frac{k}{2n}\right)$ $(k=1,2,\cdots,2n)$が成り立つ．

（証明終り）

(2) $f_n(x)=0$ より $\left|\sin(2n\pi x)\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}$ であるので，$f_n(x)=0$の解は $y=\left|\sin(2n\pi x)\right|$ と $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$ の交点のx座標と一致する．



図より，区間$\left(\frac{k-1}{2n},\frac{k}{2n}\right)$ $(k=1,2,\cdots,2n)$において2つのグラフは相異なる2つの交点を持つので，区間$\left(\frac{k-1}{2n},\frac{k}{2n}\right)$ $(k=1,2,\cdots,2n)$において$f_n(x)=0$は相異なる2つの解を持つ．

（証明終り）

(3) $y=\left|\sin(2n\pi x)\right|$ $\left(\frac{k-1}{2n}\leqq x\leqq\frac{k}{2n},\ k=1,2,\cdots,2n\right)$のグラフは直線$x=\frac{2k-1}{4n}$に関して対称であるから，(2)の2つの解を$\alpha_k$，$\beta_k$とおくと

$$\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}=\frac{2k-1}{4n} \quad より \quad \alpha_k+\beta_k=\frac{2k-1}{2n} \quad となる.$$

したがって，区間$[0,1]$における方程式$f_n(x)=0$のすべての解の和S_nは

$$S_n=\sum_{k=1}^{2n}(\alpha_k+\beta_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{2k-1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot(1+4n-1)$$

$$=2n$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}2$$

$$=2.\ \cdots(答)$$

数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ

令和2年度入学試験問題

受験番号

受験番号

解答紙

（工学部）

（5枚のうち3枚目）

63

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔3〕（30点）

〔3〕の採点

(1). Qの座標を $(0, k, 0)$ $(0 \leqq k \leqq r)$ とする．

Pの座標が $\left(\frac{1}{2}(a+r), \frac{1}{4}r, \frac{1}{2}c\right)$ であるから，

$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{2}(a+r), k-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{2}c\right)$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{1}{4}(a+r)^2 + \left(k-\frac{1}{4}r\right)^2 + \frac{1}{4}c^2}$

よって，$k = \frac{1}{4}r$，すなわち，Qの座標が $\left(0, \frac{1}{4}r, 0\right)$ のときに $|\overrightarrow{PQ}|$ は

最小値をとり，そのとき，$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}\sqrt{(a+r)^2+c^2}$

…（答）

(2) (1)より，

$\overrightarrow{OQ} = \left(0, \frac{1}{4}r, 0\right)$，$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{2}(a+r), 0, -\frac{1}{2}c\right)$

$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ かつ $|\overrightarrow{OQ}| \neq 0$ かつ $|\overrightarrow{PQ}| \neq 0$ であるから，

$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角は 90° である． （証明終り）

(3) $C\left(a, \frac{1}{2}r, c\right)$ $(c>0)$ に対し，$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}|$ より，

$r = \sqrt{a^2+\frac{1}{4}r^2+c^2}$

$a^2+c^2 = \frac{3}{4}r^2$

よって，$R\left(0, \frac{1}{2}r, 0\right)$ とすると，Cは平面 $y=\frac{1}{2}r$ 上のRを中心とする

半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ の円周のうち，$z>0$ を満たす部分を動く．

ここで，$\vec{n} = (-c, 0, a+r)$ とすると，

$\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{n} = 0$ かつ $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$ であるから，$\vec{n} \perp$（平面OPQ）である．

よって，平面OPQの方程式は

$-cx + (a+r)z = 0$

平面OPQとCとの距離を d とすると，

$$d = \frac{|-ca+(a+r)c|}{\sqrt{(-c)^2+(a+r)^2}} = \frac{rc}{\sqrt{c^2+(a+r)^2}}$$

したがって，四面体OCPQの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|\cdot d = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}r\cdot\frac{1}{2}\sqrt{(a+r)^2+c^2}\cdot\frac{rc}{\sqrt{c^2+(a+r)^2}}$$

$$= \frac{1}{48}r^2c$$

$0 < c \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}r$ であるから，

Cの座標が $\left(0, \frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ のときに四面体OCPQの体積は

最大値 $\frac{\sqrt{3}}{96}r^3$ をとる．

…(答)

64

（工　学　部）

解　答　紙

（５枚のうち４枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔４〕（30点）

〔４〕の採点

(1) 式(A)を満たす(x, y)の集合をKとする．

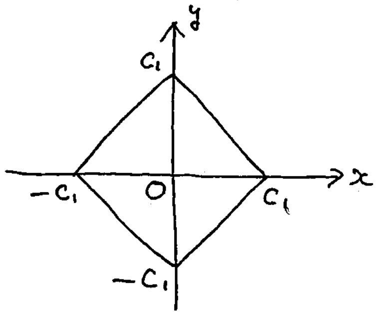
$(x, y) \in K$のとき$(-x, y) \in K$よりKの表す図形はy軸に関して対称，

$(x, y) \in K$のとき$(x, -y) \in K$よりKの表す図形はx軸に関して対称．

$x \geqq 0,\ y \geqq 0$のとき　(A)：$x + y = C_1$

よって，Kの表す図形を図示すると

右のようになる．



(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ x^2 + y^2 = r^2$　$(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ であるから，

式(A)を極方程式で表すと　$r(|\cos\theta| + |\sin\theta|) = C_1$　…(答)

式(B)を極方程式で表すと，　$r = C_2$　…(答)

(3) $f(x, y) = \dfrac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$　とすると，$f(-x, y) = f(x, y)$，$f(x, -y) = f(x, y)$

より　$x \geqq 0,\ y \geqq 0$で考えてよく，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$　$(r > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$と

おける．このとき

$$f(x, y) = \frac{r(|\cos\theta| + |\sin\theta|)}{r}$$

$$= \cos\theta + \sin\theta$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$のとき　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$　であるから　$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

よって，$1 \leqq f(x, y) \leqq \sqrt{2}$　より　最大値は$\sqrt{2}$，最小値は1　…(答)

65	数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ	令和２年度入学試験問題	受験番号	受験番号

65

（工学部）

解答紙

（５枚のうち５枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔5〕（30点）

〔5〕の採点

操作をn回$(n \geqq 1)$繰り返した直後の点Aの座標をx_nとおく．
また、$x_0 = 0$とする．

(1) $x_1 = \frac{x_0}{2}$ or $x_1 = 1 - \frac{x_0}{2}$ すなわち $x_1 = 0$ or $x_1 = 1$ である．

$x_1 = 0$の確率はα，$x_1 = 1$の確率は$1-\alpha$であるから

$P_1(y) > 0$となるyとその確率$P_1(y)$の組は

$$(y, P_1(y)) = (0, \alpha),\ (1, 1-\alpha) \quad \cdots (答)$$

(2) $0 \leqq x_k \leqq 1$ならば $0 \leqq \frac{x_k}{2} \leqq \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} \leqq 1 - \frac{x_k}{2} \leqq 1$ であるから

$0 \leqq x_{k+1} \leqq 1$である．$x_0 = 0$であるから帰納的にすべてのnについて$0 \leqq x_n \leqq 1$が成り立つ．

したがって，$x_n < 0$ or $1 < x_n$となる確率は0である．

すなわち、$y < 0$ or $1 < y$のとき$P_n(y) = 0$である．$\cdots$(証明終り)

(3) $x_n = 1$ $(n \geqq 1)$とすると $\frac{x_{n-1}}{2} = x_n = 1$ or $1 - \frac{x_{n-1}}{2} = x_n = 1$

したがって、$x_{n-1} = 2$ or $x_{n-1} = 0$ (2)より$x_{n-1} = 0$（確率$1-\alpha$）

また、$x_n = 0$ $(n \geqq 1)$とすると、同様に$x_{n-1} = 0$（確率α）

以上より、$x_n = 1$となるのは

$$\overset{x_0}{0} \xrightarrow[\alpha]{} \overset{x_1}{0} \xrightarrow[\alpha]{} \overset{x_2}{0} \xrightarrow[\alpha]{} \cdots\cdots \xrightarrow[\alpha]{} \overset{x_{n-1}}{0} \xrightarrow[1-\alpha]{} \overset{x_n}{1}$$

と移動する場合のみで、その確率は $P_n(1) = \alpha^{n-1}(1-\alpha)$ $\cdots$(答)

(4) $x_n = 2^{-k}$ならば $2^{-k} = \frac{x_{n-1}}{2}$ $\cdots$(あ) or $2^{-k} = 1 - \frac{x_{n-1}}{2}$ $\cdots$(い)

(あ)のとき $x_{n-1} = 2^{-k+1}$．(い)のとき $x_{n-1} = 2(1 - 2^{-k})$ （$k > 1$のとき$x_{n-1} > 1$）

(2)より（$k = 1$のときを含めて）$x_{n-1} = 2^{-k+1}$

このことと(3)より $x_n = 2^{-k}$となるのは、$n > k$かつ

$$\overset{x_0}{0} \xrightarrow[\alpha]{} \overset{x_1}{0} \xrightarrow[\alpha]{} \cdots \xrightarrow[\alpha]{} \overset{x_{n-k-1}}{0} \xrightarrow[1-\alpha]{} \overset{x_{n-k}}{1} \xrightarrow[1]{} \overset{x_{n-k+1}}{2^{-1}} \xrightarrow[\alpha]{} \cdots \xrightarrow[\alpha]{} \overset{x_n}{2^{-k}}$$

と移動する場合のみである．よって、求める確率は

① $n \leqq k$のとき $P_n(2^{-k}) = 0$ $\cdots$(答)

② $n > k$のとき $P_n(2^{-k}) = \alpha^{n-k-1} \times (1-\alpha) \times 1 \times \alpha^{k-1}$

$= \alpha^{n-2}(1-\alpha)$ $\cdots$(答)

◇K31(363—69)