23	数学 数学I，数学A 数学II，数学B

令和２年度入学試験問題

受	験	番	号

受	験	番	号

解答紙

（４枚のうち１枚目）

23

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔１〕 (50点)　$a \geqq 0$とする。２つの放物線$C_1 : y = x^2$，……

〔１〕の採点

$C_1 : y = x^2$ …①　　$C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ …②

(1) ①，②を連立してyを消去すると，

$x^2 = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ より，　$2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40 = 0$ …③

xの２次方程式③の判別式をDとおくと，

$D/4 > 0$ すなわち $-2a^3 + 3a^2 + 80 > 0$

より，　$(a-4)(2a^2+5a+20) < 0$

$a \geqq 0$とあわせて，求めるaの値の範囲は，

$0 \leqq a < 4$ …④　　…(答)

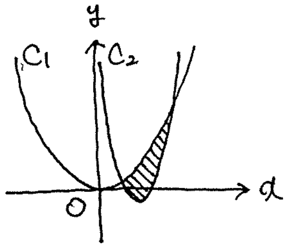
(2) ④において③を解くと，

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{D/4}}{2}$$

となり，これを

$$\alpha = \frac{3a - \sqrt{D/4}}{2}, \quad \beta = \frac{3a + \sqrt{D/4}}{2}$$

とおく。



このとき，

$$S = \int_\alpha^\beta \left(x^2 - \{3(x-a)^2 + a^3 - 40\}\right) dx$$

$$= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx$$

$$= -2 \cdot \left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{-2a^3+3a^2+80}\right)^3$$

ここで，$f(a) = -2a^3 + 3a^2 + 80$ とおくと，

$f'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a-1)$

より，④における$f(a)$の増減は，

a	0	…	1	…	(4)
$f'(a)$	0	+	0	−	
$f(a)$	80	↗	81	↘	(0)

よって，求めるSの最大値は，$a=1$のとき，

$\frac{1}{3}(\sqrt{81})^3 = 243$ 　　…(答)

(1) 採点

(2) 採点

〔２〕（50点） 座標空間内の４点 O(0,0,0)，A(1,1,0)，B(1,0,p)，C(q,r,s) を ……

〔２〕の採点

(1) $OA^2=1^2+1^2+0^2=2$ と $OB=OA$ より

$$OB^2=1^2+0^2+p^2=2$$

これと $p>0$ より $p=1$

次に $OC=AC=BC=OA$ より

$$\begin{cases} OC^2=q^2+r^2+s^2=2 \\ AC^2=(q-1)^2+(r-1)^2+s^2=2 \\ BC^2=(q-1)^2+r^2+(s-1)^2=2 \end{cases}$$

これより
$$\begin{cases} q^2+r^2+s^2=2 \\ q=1-s \\ r=s \end{cases}$$

q, r を消去すると

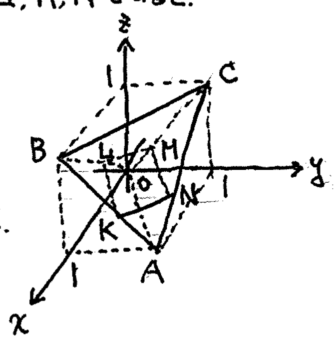
$(1-s)^2+s^2+s^2=2$ すなわち $(s-1)(3s+1)=0$

$s>0$ であるから $s=1$

よって， $p=1$, $q=0$, $r=1$, $s=1$ …（答）

(2) 平面 $z=t$ $(0<t<1)$ と辺AB, OB, OC, ACの交点をそれぞれK, L, M, Nとすると，

$K(1, 1-t, t)$, $L(t, 0, t)$, $M(0, t, t)$, $N(1-t, 1, t)$



これより $\overrightarrow{KL}=(t-1, t-1, 0)$, $\overrightarrow{NM}=(t-1, t-1, 0)$

よって $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$ であるから，四角形KLMNは平行四辺形である.

さらに $\overrightarrow{KL}=(t-1, t-1, 0)$, $\overrightarrow{KN}=(-t, t, 0)$ より

$$\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{KN}=-t(t-1)+t(t-1)=0$$

であるから

$$\overrightarrow{KL}\perp\overrightarrow{KN}$$

(1) 採点

よって，四角形KLMNは長方形であるから，その面積 $S(t)$ は

$$S(t)=|\overrightarrow{KL}||\overrightarrow{KN}|=\sqrt{(-t)^2+t^2}\sqrt{(t-1)^2+(t-1)^2}=\sqrt{2}|t|\cdot\sqrt{2}|1-t|$$

(2) 採点

$0<t<1$ より

$$S(t)=2t(1-t)=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \quad (0<t<1)$$

したがって，求める最大値は

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \quad \cdots\text{（答）}$$

〔３〕 (50点) a，b，c を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が……

〔３〕の採点

(1) $\omega = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，$\omega^3 = -1$ ─①

これより，$\omega^3+1=0$

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$

$\omega \neq -1$ であるから，

$\omega^2-\omega+1=0$ ─②

$f(\omega)=0$ より，$\omega^3+a\omega^2+b\omega+c=0$

$-1+a(\omega-1)+b\omega+c=0$ (①,②を用いた)

$(a+b)\omega = a-c+1$

ここで，$a+b\neq 0$ と仮定すると，

$\omega = \dfrac{a-c+1}{a+b}$

となり，左辺は虚数，右辺は有理数であるから矛盾

よって，$a+b=0$，$a-c+1=0$ であるから，

$a=c-1$，$b=-c+1$． …(答)

(2) (1)より，$f(x)=x^3+(c-1)x^2+(-c+1)x+c$ であるから，

$f(1)=c+1$，$f(-1)=3c-3$．

条件より，$\begin{cases} c+1=7M+4, \\ 3c-3=11N+2 \end{cases}$ (M,Nは整数)

とかける。

これより，$11N-21M=4$

$11(N-8)=21(M-4)$

11と21は互いに素であるから，kを整数として，

$\begin{cases} N-8=21k, \\ M-4=11k \end{cases}$ すなわち，$\begin{cases} N=21k+8, \\ M=11k+4 \end{cases}$

と表せる。

(1)採点

よって，$c=77k+31$ となり，$|c|\leqq 40$ より，$k=0$ のとき，

$c=31$．

このとき，$f(x)=0$ を解くと，

(2)採点

$x^3+30x^2-30x+31=0$

$(x+31)(x^2-x+1)=0$

$x=-31$，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ …(答)

解答紙

（４枚のうち４枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔４〕（50点）　４個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。……

〔４〕の採点

(1) 余事象を用いて考える.

X が 5 の倍数ではない値になる確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^4$

X が 5 の倍数だが 25 の倍数ではない値になる確率は ${}_4C_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$

よって, X が 25 の倍数になる確率は

$$1-\frac{5^4+4\cdot5^3}{6^4}=\frac{19}{144}$$

…(答)

(2) 余事象を用いて考える.

サイコロの目を次の A, B, C に分けると,

$$A=\{1,3,5\},\quad B=\{2,6\},\quad C=\{4\}$$

X が奇数になるのは A から４個出るときなので, その確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^4$

X が偶数だが４の倍数ではない値になるのは A から３個と, B から１個出るときなので, その確率は ${}_4C_3\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^3\cdot\frac{2}{6}$

よって, X が４の倍数になる確率は

$$1-\frac{3^4+4\cdot3^3\cdot2}{6^4}=\frac{37}{48}$$

…(答)

(3) ２つのサイコロの目の積が４の倍数だが５の倍数ではない値になる確率は, 右図を参考にすると, $\frac{13}{6^2}$

	1	2	3	4	5	6
1				○		
2		○		○		○
3				○		
4	○	○	○	○		○
5						
6		○		○		○

よって, ５の目が２個だけ出て X が 100 の倍数になる確率は

$$ {}_4C_2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{13}{6^2}=\frac{78}{6^4}$$

また, ５の目が３個だけ出て X が 100 の倍数になるのは残り１個が４の目のときなので, その確率は

$$ {}_4C_3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{6^4}$$

以上より, X が 100 の倍数になる確率は

$$\frac{78+4}{6^4}=\frac{41}{648}$$

…(答)

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点