27

数学 数学Ⅰ，数学A　数学Ⅱ，数学B　数学Ⅲ

令和２年度入学試験問題

解答紙

（５枚のうち１枚目）

受験番号

27

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔１〕（50点）　点 $(a, 0)$ を通り，曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が ……

〔１〕の採点

$y = e^{-x} - e^{-2x}$ より　$y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$

点 $(t, e^{-t} - e^{-2t})$ における接線は

$$y = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t) + e^{-t} - e^{-2t}$$

$(a, 0)$ を通る条件は，　$0 = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t) + e^{-t} - e^{-2t}$

$$a = t + \frac{e^t - 1}{e^t - 2}$$

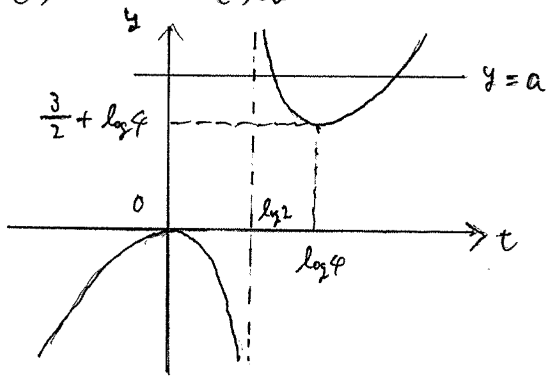
これをみたす実数 t が存在するような a の値の範囲を求めればよい。

$g(t) = t + \dfrac{e^t - 1}{e^t - 2}$ とおくと，　$g'(t) = \dfrac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$

t		0		$\log 2$		$\log 4$	
$g'(t)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	0	↘	$\times$	↘	$\frac{3}{2} + \log 4$	↗

$\displaystyle\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(t + \frac{1 - \frac{1}{e^t}}{1 - \frac{2}{e^t}} \right) = \infty$　　$\displaystyle\lim_{t \to \log 2 - 0} g(t) = -\infty$

$\displaystyle\lim_{t \to -\infty} g(t) = \lim_{t \to -\infty} \left(t + \frac{e^t - 1}{e^t - 2} \right) = -\infty$　　$\displaystyle\lim_{t \to \log 2 + 0} g(t) = +\infty$



グラフより

求める a の範囲は

$a \leqq 0,\ \frac{3}{2} + \log 4 \leqq a$ …（答）

採点

解答紙

（５枚のうち２枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔２〕（50点） a, b, c, d を整数とし，i を虚数単位とする。……

〔２〕の採点

(1) $f(x)$ を x^2-x+1 で割ることにより

$$f(x)=(x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\}+(b+c-1)x+d-a-b.$$

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$x^2-x+1=0$ より

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=(b+c-1)\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+d-a-b.$$

ここで，$b+c-1\neq0$ と仮定すると，$f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ より

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=-\frac{d-a-b}{b+c-1}$ となるが，左辺は虚数，a,b,c,d：整数より右辺は有理数となり，これは

不合理．よって $b+c-1=0$ であり，$f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ より $d-a-b=0$.

したがって $c=1-b$, $d=a+b$. …(答)

(2) $7x+1=11y+10$ …① は，$7(x-6)=11(y-3)$ と変形できるので，7と11は互いに素

であることから ①を満たす整数 x, y は

$x=11k+6$, $y=7k+3$ (k：整数) と表せる.

したがって，7で割ると1余り，11で割ると10余る整数は $43+77k$ (k：整数)

と表せる．同様にして

7で割ると3余り，11で割ると10余る整数は $10+77l$ (l：整数)

と表せる.

(1)より，$f(x)=(x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\}$ であるから，条件より

$$\begin{cases}f(1)=43+77k\\ f(-1)=10+77l\end{cases}\quad すなわち\quad\begin{cases}2a+b+2=43+77k & \cdots②\\ 3b=10+77l & \cdots③\end{cases}$$

$|b|\leqq40$ より $|3b|\leqq120$ であり，③ および $3b$ は3の倍数であることから

$l=1$ に限られ，このとき $b=29$.

また，このとき ② より $2a=12+77k$ …②′

$|a|\leqq40$ より $|2a|\leqq80$ であり，②′ および $2a$ は2の倍数であることから

$k=0$ に限られ，このとき $a=6$.

以上より，$a=6$, $b=29$, $c=-28$, $d=35$ となり，これらは

整数であるという条件を満たす.

(1)採点

$f(x)=(x^2-x+1)(x^2+7x+35)$ であるから

方程式 $f(x)=0$ の解は

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-7\pm\sqrt{91}i}{2}\quad\cdots(答)$$

(2)採点

数学　数学Ⅰ，数学A　数学Ⅱ，数学B　数学Ⅲ

令和２年度入学試験問題

受験番号

解答紙

（５枚のうち３枚目）

受験番号

29

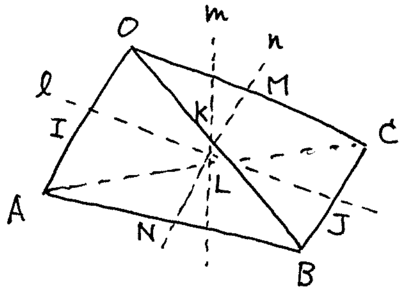
解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔３〕(50点)　四面体OABCにおいて，辺OAの中点と辺BCの中点を通る直線をℓ，……

（３）の採点

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく

辺OA, BC, OB, CA, OC, ABの中点をそれぞれI, J, K, L, M, Nとする



$\ell\perp m$ より $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{KL}$ すなわち $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KL}=0$

$$\left(\frac{\vec b+\vec c}{2}-\frac{\vec a}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec c+\vec a}{2}-\frac{\vec b}{2}\right)=0$$

$|\vec c|^2-|\vec b-\vec a|^2=0$ よって $|\vec c|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt5$

同様にして，$|\vec a|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt3$, $|\vec b|=|\overrightarrow{CA}|=2$

これらより $\vec a\cdot\vec b=\dfrac{|\vec a|^2+|\vec b|^2-|\vec b-\vec a|^2}{2}=1$,

$\vec b\cdot\vec c=\dfrac{|\vec b|^2+|\vec c|^2-|\vec c-\vec b|^2}{2}=3$, $\vec c\cdot\vec a=\dfrac{|\vec c|^2+|\vec a|^2-|\vec a-\vec c|^2}{2}=2$

$\overrightarrow{OB}$と$\overrightarrow{CA}$のなす角を$\alpha\ (0\leqq\alpha\leqq\pi)$とおくと

$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{\vec b\cdot(\vec a-\vec c)}{2\times2}=-\dfrac12$ よって $\alpha=\dfrac23\pi$ より $\theta=\pi-\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ …(答)

(2) $\overrightarrow{IL}=\dfrac{\vec c+\vec a}{2}-\dfrac{\vec a}{2}=\dfrac{\vec c}{2}$, $\overrightarrow{KJ}=\dfrac{\vec b+\vec c}{2}-\dfrac{\vec b}{2}=\dfrac{\vec c}{2}$ であるから,

$\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{KJ}$ より四角形ILJKは平行四辺形である.

ゆえに線分IJ, KLは互いに中点で交わる

同様にして線分IJ, MNも互いに中点で交わるのでその交点をPとおく

次に, △OAPを考える

$\vec a\cdot\overrightarrow{IJ}=\vec a\cdot\left(\dfrac{\vec b+\vec c}{2}-\dfrac{\vec a}{2}\right)=\dfrac12(\vec a\cdot\vec b+\vec c\cdot\vec a-|\vec a|^2)=0$ より

$\vec a\perp\overrightarrow{IJ}$ すなわち OA⊥PI であるから, △OAPはOP=APの二等辺三角形である

同様にして, △OBPで考えると, OP=BP, △OCPで考えると OP=CP

以上より OP=AP=BP=CP であるから Pは四面体OABCの4つの頂点

をすべて通る球の中心である. $\overrightarrow{OP}=\dfrac12(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ})=\dfrac14(\vec a+\vec b+\vec c)$ である

(1)採点

から, 求める半径は $|\overrightarrow{OP}|=\dfrac14\sqrt{|\vec a+\vec b+\vec c|^2}$

$$=\frac14\sqrt{|\vec a|^2+|\vec b|^2+|\vec c|^2+2(\vec a\cdot\vec b+\vec b\cdot\vec c+\vec c\cdot\vec a)}$$

$$=\frac{\sqrt6}{2}$$

…(答)

(2)採点

30

数学　数学Ⅰ，数学A　数学Ⅱ，数学B　数学Ⅲ

令和2年度入学試験問題

受	験	番	号

受	験	番	号

解答紙

（5枚のうち4枚目）

30

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔4〕（50点）　4個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。……

〔4〕の採点

(1) 余事象を用いて考える.

X が5の倍数ではない値になる確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^4$

X が5の倍数だが25の倍数ではない値になる確率は ${}_4C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

よって，X が25の倍数になる確率は

$$1 - \frac{5^4 + 4 \cdot 5^3}{6^4} = \frac{19}{144} \quad \cdots（答）$$

(2) 余事象を用いて考える.

サイコロの目を次のA，B，Cに分けると，

$A = \{1, 3, 5\}$，$B = \{2, 6\}$，$C = \{4\}$

X が奇数になるのはAの値が4個出るときなので，その確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^4$

X が偶数だが4の倍数ではない値になるのはAの値が3個とBの値が1個出るときなので，その確率は ${}_4C_3 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^3 \cdot \frac{2}{6}$

よって，X が4の倍数になる確率は

$$1 - \frac{3^4 + 4 \cdot 3^3 \cdot 2}{6^4} = \frac{37}{48} \quad \cdots（答）$$

(3) 2つのサイコロの目の積が4の倍数だが5の倍数ではない値になる確率は，右図を参考にすると，$\frac{13}{6^2}$

	1	2	3	4	5	6
1				○		
2		○		○		○
3				○		
4	○	○	○	○		○
5						
6		○		○		○

よって，5の目が2個だけ出て X が100の倍数になる確率は

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{13}{6^2} = \frac{78}{6^4}$$

また，5の目が3個だけ出て X が100の倍数になるのは残り1個が4の目のときなので，その確率は

$${}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6^4}$$

以上より，X が100の倍数になる確率は

$$\frac{78 + 4}{6^4} = \frac{41}{648} \quad \cdots（答）$$

(1) 採点

(2) 採点

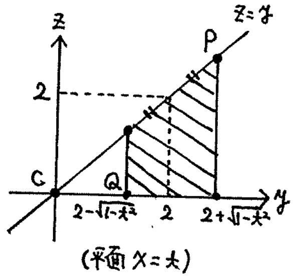
(3) 採点

〔5〕（50点） 座標空間において，中心 $(0,2,0)$，半径1で xy 平面内にある円を D とする。……

〔5〕の採点

$$T:\begin{cases} x^2+(y-2)^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ z \leqq y \end{cases}$$

(1) T を平面 $x=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面は，

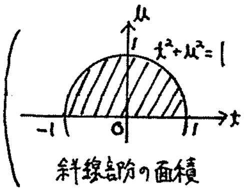


$$\begin{cases} t^2+(y-2)^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq z \leqq y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 2-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 2+\sqrt{1-t^2} \\ 0 \leqq z \leqq y \end{cases}$$

よって，
$$S(t) = 2\left\{(2+\sqrt{1-t^2})-(2-\sqrt{1-t^2})\right\}$$
$$= 4\sqrt{1-t^2} \quad \cdots\text{(答)}$$

T の体積を V_1 とすると，

$$V_1 = \int_{-1}^{1} 4\sqrt{1-t^2}\,dt = 4\times\left(\quad\right) = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi \quad \cdots\text{(答)}$$



(2) T を x 軸のまわりに1回転させてできる立体を U とする。

$C(t,0,0)$，$P(t,\ 2+\sqrt{1-t^2},\ 2+\sqrt{1-t^2})$，$Q(t,\ 2-\sqrt{1-t^2},\ 0)$ とすると，

U を平面 $x=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面積は，

$$\pi(CP^2-CQ^2) = \pi\left\{2(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\right\}$$
$$= \pi(5-t^2+12\sqrt{1-t^2})$$

よって，U の体積を V_2 とすると，

$$V_2 = \int_{-1}^{1} \pi(5-t^2+12\sqrt{1-t^2})\,dt$$
$$= \pi\left\{\left[5t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}+12\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$= \frac{28}{3}\pi+6\pi^2 \quad \cdots\text{(答)}$$

(1) 採点

(2) 採点