$\boxed{1}$ (1)

$$-2x^2+4|x|-2x+1=\begin{cases}-2x^2+2x+1 & (x\geqq 0 \text{のとき})\\ -2x^2-6x+1 & (x<0 \text{のとき})\end{cases}$$

であるから，x軸との共有点のx座標は，

$x\geqq 0$のとき，$-2x^2+2x+1=0$ より $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，

$x<0$のとき，$-2x^2-6x+1=0$ より $x=-\frac{3+\sqrt{11}}{2}$．

以上より，$\boxed{-\frac{3+\sqrt{11}}{2}}$ ア，

$\boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ イ．

$y=-2x^2+2x+1$ と $y=mx+1$ の共有点のx座標は，

$$-2x^2+2x+1=mx+1,$$

$$2x^2+(m-2)x=0,$$

$$2x\left(x+\frac{m-2}{2}\right)=0$$

より，　$x=0$，$-\frac{m-2}{2}$．

一方，$y=-2x^2-6x+1$ と $y=mx+1$ の共有点のx座標は，

$$-2x^2-6x+1=mx+1,$$

$$2x^2+(m+6)x=0,$$

$$2x\left(x+\frac{m+6}{2}\right)=0$$

より，　$x=0$，$-\frac{m+6}{2}$．

したがって，$y=-2x^2+4|x|-2x+1$ と $y=mx+1$ がちょうど3つの共有点をもつ条件は，

$$-\frac{m-2}{2}>0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{m+6}{2}<0.$$

これより，求める範囲は，

$$\boxed{-6}_{\text{ウ}}<m<\boxed{2}_{\text{エ}}.$$

©河合塾　2020年

$\boxed{1}$ (2)

9枚のカードから3枚を同時に取り出す取り出し方は，${}_9C_3=84$ 通りあり，これらは同様に確からしい。

白いカードがちょうど1枚だけ取り出されるとき，赤いカードはちょうど2枚取り出されるから，その取り出し方は，

$${}_5C_1\times{}_4C_2=5\times6=30\text{(通り)}.$$

よって，事象Aが起こる確率は，

$$\frac{30}{84}=\boxed{\frac{5}{14}}\text{オ}.$$

事象Aと事象Bが同時に起こるのは，

(a) 1が記された白いカードと，赤いカード2枚 を取り出す

(b) 2～5のいずれかが記された白いカード1枚と，1が記された赤いカードと，2～4のいずれかが記された赤いカード1枚を取り出す

のいずれかが起こる場合である。

各々の取り出し方は

(a) $1\times{}_4C_2=6$ (通り)

(b) ${}_4C_1\times1\times{}_3C_1=12$ (通り)

であり，(a), (b) は互いに排反であるから，事象Aと事象Bが同時に起こる確率は，

$$\frac{6+12}{84}=\boxed{\frac{3}{14}}\text{カ}.$$

事象Aと事象Cが同時に起こるのは，白いカード1枚と1が記された赤いカード，2～4のいずれかが記された赤いカード1枚を取り出す場合であるから，

$${}_5C_1\times1\times{}_3C_1=15\text{(通り)}.$$

以上より，事象Aが起こったとき，事象Cが起こる条件つき確率は，

$$\frac{\frac{15}{84}}{\frac{30}{84}}=\boxed{\frac{1}{2}}\text{キ}.$$

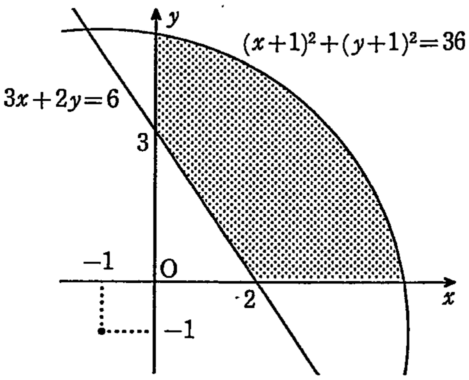
©河合塾　2020年

2

(1)　$x^2+y^2+2x+2y-34\leqq 0$ を変形すると

$$(x+1)^2+(y+1)^2\leqq 36$$

となるから，領域 D は下図の打点部分のようになる．
（ただし，境界を含む）



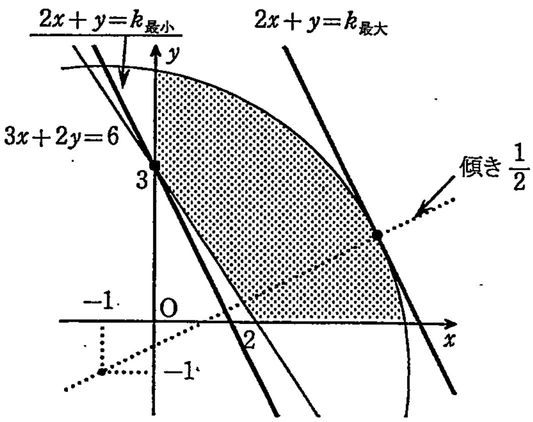
(i)　$2x+y$ が k という値をとるための条件は，
直線 $2x+y=k$，つまり傾きが -2 で y 切片が k の直線と，D が共有点をもつことである。

直線 $2x+y=k$ と円 $(x+1)^2+(y+1)^2=36$ が接するための条件は

$$\frac{|2\cdot(-1)+(-1)-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=6.$$

$$k=-3\pm 6\sqrt{5}.$$

$k=-3+6\sqrt{5}$ のとき，下図のように直線と円は第1象限で接する．



よって，k の最大値は

$$k=\boxed{-3+6\sqrt{5}}_{ア}.$$

k が最小となるのは直線 $2x+y=k$ が点 $(0,\ 3)$ を通るときであり

$$2\cdot 0+3=\boxed{3}_{イ}.$$

(ii)　$A=x^2+y^2-10x-10y$ は

$$A=(x-5)^2+(y-5)^2-50$$

と変形できるから，A は

$A=$（点 $(5,\ 5)$ と $(x,\ y)$ の距離 d の2乗）-50.

D 上の点 $(x,\ y)$ と点 $(5,\ 5)$ との距離 d が最大となるのは，

（$(5,\ 5)$ と $(0,\ 3)$ の距離）$<$（$(5,\ 5)$ と $(2,\ 0)$ の距離）

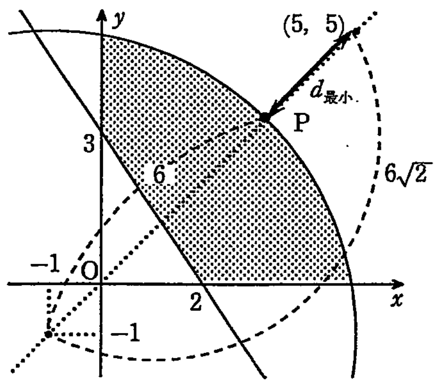
であるから，$(x,\ y)=(2,\ 0)$ のときである．

このとき，A は最大となり，最大値は

$$(3^2+5^2)-50=\boxed{-16}_{ウ}.$$

d が最小となるのは，$(x,\ y)$ が下図のような点 P にくるときで，このとき $d=6\sqrt{2}-6$ であるから，A の最小値は

$$(6\sqrt{2}-6)^2-50=\boxed{58-72\sqrt{2}}_{エ}.$$



©河合塾　2020年

$\boxed{2}$ (2)

(i)

$\vec{n}=(a, b, c)$ (a, b, c : 実数) とおく.

$\vec{n}$ は $\overrightarrow{AB}=(-2,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,3)$ の両方に垂直であるから,

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ かつ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$-2a+b=0$ かつ $-2a+3c=0$.

$b=2a$ かつ $c=\frac{2}{3}a$.

よって $\vec{n}=\left(a, 2a, \frac{2}{3}a\right)=\frac{1}{3}a(3,6,2)$ と表せる. $k=\frac{1}{3}a$ とおく.

$|\vec{n}|=1$ であるから,

$|k(3,6,2)|=1$.

$|k|\times\sqrt{3^2+6^2+2^2}=1$

これより $k=\pm\frac{1}{7}$. …①

一方, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=k(3,6,2)\cdot(-2,0,5)$

$=k(-6+0+10)$

$=4k$

が正であるから. $k>0$. …②

①, ② より $k=\frac{1}{7}$.

以上より, $\vec{n}=\frac{1}{7}(3,6,2)$

$=\boxed{\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)}$ オ.

(ii) 点Pが平面ABC上にあるとき,

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AP}$ より $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$.

ここで,

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)\cdot(t-2, -t, t^2+2)$

$=\frac{1}{7}\{3(t-2)+6(-t)+2(t^2+2)\}$

$=\frac{1}{7}(2t^2-3t-2)$

$=\frac{1}{7}(2t+1)(t-2)$

であるから,

$\frac{1}{7}(2t+1)(t-2)=0$.

$t>0$ であるから $t=\boxed{2}$ カ.

(iii) $\overrightarrow{DP}=(t, -t, t^2-3)$.

$|\overrightarrow{DP}|=\sqrt{t^2+(-t)^2+(t^2-3)^2}$

$=\sqrt{t^4-4t^2+9}$

$=\sqrt{(t^2-2)^2+5}$.

よって, $t^2=2$, すなわち $t=\boxed{\sqrt{2}}$ キ ($t>0$ より) のとき, $|\overrightarrow{DP}|$ は最小値をとる.

©河合塾　2020年

3

(1)　$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ が $x=-1$ で極値をとるためには，$f'(-1)=0$ であることが必要である.

$f'(x)=3x^2-4x+a$ より，

$$3+4+a=0.$$
$$a=-7.$$

このとき，$f'(x)=(x+1)(3x-7)$ となるから，$f(x)$ の増減は下のようになり，確かに $f(x)$ は $x=-1$ で極値をとる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

さらに，$f(-1)=12$ であるから，

$$-1-2+7+b=12.$$
$$b=8.$$

以上より，定数 a，b の値は

$$a=-7,\ b=8 \quad \cdots(答)$$

であり，$f(x)$ は 12 以外に

$$x=\frac{7}{3} \quad \cdots(答)$$

で極小値

$$f\left(\frac{7}{3}\right)=-\frac{176}{27} \quad \cdots(答)$$

をとる.

(2)　$f(x)=0$ となる x の値は

$$x^3-2x^2-7x+8=0.$$
$$(x-1)(x^2-x-8)=0.$$
$$x=1,\ \frac{1\pm\sqrt{33}}{2}.$$

$\frac{1-\sqrt{33}}{2}<1<\frac{1+\sqrt{33}}{2}$ であるから，

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{33}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{33}}{2}. \quad \cdots(答)$$

また，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-8\end{cases}$$

であるから，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=17. \quad \cdots①$$

したがって，

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\\&=17^2-2\cdot(-8)^2\\&=161. \quad \cdots(答)②\end{aligned}$$

(3)　$\alpha\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq 0$，$1\leqq x\leqq\beta$ で $f(x)\leqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^1 f(x)\,dx+\int_1^\beta(-f(x))\,dx\\&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+8x\right]_\alpha^1\\&\qquad-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+8x\right]_1^\beta\\&=2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{7}{2}+8\right)\\&\quad-\left\{\frac{\alpha^4+\beta^4}{4}-\frac{2(\alpha^3+\beta^3)}{3}-\frac{7(\alpha^2+\beta^2)}{2}+8(\alpha+\beta)\right\}.\end{aligned}$$

ここで，

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta=25$$

であるから，これと①，②より

$$\begin{aligned}S&=2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{7}{2}+8\right)\\&\quad-\left(\frac{161}{4}-\frac{2\cdot 25}{3}-\frac{7\cdot 17}{2}+8\right)\\&=\frac{433}{12} \quad \cdots(答)\end{aligned}$$

©河合塾　2020年