1

(1)（(イ), (ウ) では「約数」は「正の約数」として解答する）(注1)

$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, …①

101 は素数であるから, 2020 の約数のうち, 3桁の素数は $\boxed{101}$ア.

① より, 2020 の正の約数の個数は

$$(2+1)(1+1)(1+1) = \boxed{12}\text{イ 個}$$

であり, それらの和は

$$(1+2+2^2)(1+5)(1+101)$$
$$= \boxed{4284}\text{ウ}$$

2020 の約数のうち 3桁のものは

$101,\ 2\cdot101,\ 2^2\cdot101,\ 5\cdot101$

の $\boxed{4}$エ 個

(2) $\log_2(x+2)+\log_2(2x-3)=2$.

真数は正だから, $x+2>0$ かつ $2x-3>0$.

$x>\frac{3}{2}$. …②

このとき, 方程式より

$$\log_2(x+2)(2x-3)=\log_2 2^2.$$
$$(x+2)(2x-3)=2^2,$$
$$2x^2+x-10=0,$$
$$(2x+5)(x-2)=0.$$

② より　$x=\boxed{2}$オ.

$$2(\log_2 x)^2+5\log_2 x-12=0.$$

真数は正だから, $x>0$.

$\log_2 x = t$ とおくと, 方程式から

$$2t^2+5t-12=0.$$

$(2t-3)(t+4)=0$ より $t=\frac{3}{2},\ -4$.

$t=\frac{3}{2}$ のとき　$x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$,

$t=-4$ のとき　$x=2^{-4}=\frac{1}{16}$.

いずれも $x>0$ をみたす.

よって, 方程式は有理数の解 $\boxed{\frac{1}{16}}$カ と無理数の解 $\boxed{2\sqrt{2}}$キ をもつ.

(3) $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とし三角形 ABC の外接円の半径を R とする. 正弦定理により,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R. \quad \cdots③$$

$\sin A : \sin B : \sin C = 7:5:3$ より

$a=7k,\ b=5k,\ c=3k\ (k>0)$ …④

とおける. 余弦定理により

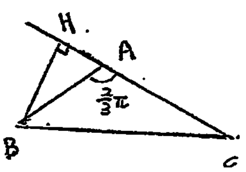
$$\cos A=\frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\cdot5k\cdot3k}=-\frac{1}{2}.$$

$0<A<\pi$ より　$A=\boxed{\frac{2}{3}\pi}$ク. (注2)

辺 AC を直径とする円の面積は $\pi\cdot\left(\frac{5}{2}k\right)^2$, △ABC の面積は $\frac{1}{2}\cdot5k\cdot3k\sin\frac{2}{3}\pi$ だからその比は

$$\frac{\pi\cdot\frac{25}{4}k^2}{\frac{15}{2}k^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{\frac{5\sqrt{3}}{9}\pi}\text{ケ}.$$

右図より



$AH = AB\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}k$,

$HC = CA + AH = 5k+\frac{3}{2}k=\frac{13}{2}k$.

H は辺 AC を $\boxed{3:13}$コ の比に外分する.

$\boxed{1}$

(注1)　「約数」として「負の約数」も考慮すると，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ は次のようになる．

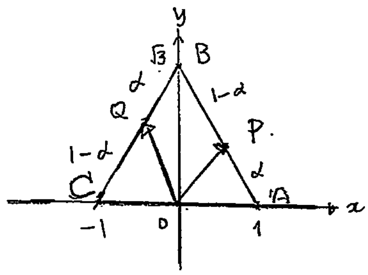
2020 の約数の個数は

$2(2+1)(1+1)(1+1) = \boxed{24}^{イ}$ 個．

また，a が 2020 の約数のとき $-a$ も 2020 の約数なので，それらの和は $\boxed{0}^{ウ}$．

(注2) $^{ク}\boxed{120°}$ としてもよい．

$\boxed{2}$



$\overrightarrow{OP} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}$

$= (1-\alpha)(1,0) + \alpha(0,\sqrt{3})$

$= (1-\alpha, \sqrt{3}\alpha)$

よって，　Pの座標は $\boxed{(1-\alpha,\ \sqrt{3}\alpha)}^{ア}$．

$\beta = 1-\alpha$ より

$\overrightarrow{OP} = (\beta, \sqrt{3}\alpha)$　…①

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\boxed{3}^{イ}\alpha^2+\beta^2}$．

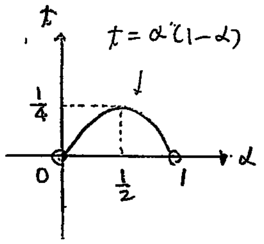
$t = \alpha\beta$ とおくと，

$t = \alpha(1-\alpha) = -\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

$(0<\alpha<1)$，

t のとりうる値の範囲は

$0 < t \leqq \boxed{\frac{1}{4}}^{ウ}$．…②



$\overrightarrow{OQ} = (1-\alpha)\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OC}$

$= \beta(0,\sqrt{3}) + \alpha(-1,0)$

すなわち，

$\overrightarrow{OQ} = (-\alpha, \sqrt{3}\beta)$　…③

①，③より

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = -\alpha\beta + 3\alpha\beta = \boxed{2t}^{エ}$．

また

$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= \boxed{1-2t}^{オ}$．

$\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$= (1-2t)^2 - 2t^2$

$= \boxed{2t^2-4t+1}^{カ}$．

$|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|$

$= \sqrt{3\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha^2+3\beta^2}$

$= \sqrt{3(\alpha^4+\beta^4)+10\alpha^2\beta^2}$

$= \sqrt{3(2t^2-4t+1)+10t^2}$

$= \boxed{\sqrt{16t^2-12t+3}}^{キ}$．

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|} = \dfrac{2t}{\sqrt{16t^2-12t+3}}$

$\left(0<t\leqq\frac{1}{4}\right)$

$\cos\theta \neq 0$ であり

$\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{16t^2-12t+3}}{2t}$

$= \sqrt{4-\frac{3}{t}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2}}$

$u = \frac{1}{t}$，　$f(u) = 4-3u+\frac{3}{4}u^2$

とおくと，②より　$u \geqq 4$．

$f(u) = \frac{3}{4}(u-2)^2+1$

だから，$f(u)$ のとり得る値の範囲は　$f(u) \geqq f(4)$

すなわち　$f(u) \geqq 4$．

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{f(u)}}$ より　$0 < \cos\theta \leqq \frac{1}{2}$．

θ のとりうる値の範囲は

$\boxed{\frac{\pi}{3}}^{ク} \leqq \theta < \boxed{\frac{\pi}{2}}^{ケ}$．

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき　$u=4$，　$t=\frac{1}{4}$ であり

$\alpha = \boxed{\frac{1}{2}}^{コ}$

3

(1) $a_n = 3\cdot 3^{n-1} = \boxed{3^n}^{ア}$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3(3^n-1)}{3-1} = \boxed{\frac{3}{2}(3^n-1)}^{イ}.$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}^{ウ}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k = \frac{1}{36}(2n+1)(2n+3)(2n+5) \quad \cdots ④$$

④で $n=1$ として　$a_1b_1c_1 = \dfrac{35}{12}$.

$a_1=3$，$b_1=1$ より　$c_1 = \boxed{\dfrac{35}{36}}^{エ}$.

$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k$ とおくと，④より，

$n \geqq 2$ のとき

$$T_n - T_{n-1}$$
$$= \frac{1}{36}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)-(2n-1)(2n+1)(2n+3)\}$$
$$= \boxed{\frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)}^{オ}.$$

よって $n \geqq 2$ のとき

$$a_n b_n c_n = \frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)$$

$$c_n = \frac{(2n+1)(2n+3)}{6a_n b_n}$$
$$= \boxed{\frac{2n+3}{3^n n(n+1)}}^{カ}. \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき

$$n3^n c_n = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 2 \quad (n\to\infty)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n3^n c_n = \boxed{2}^{キ}$.

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k c_k}{2k+3}$$
$$= \frac{3}{5}c_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{3^k}{2k+3}\cdot\frac{2k+3}{3^k k(k+1)}$$
$$= \frac{7}{12} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$= \frac{7}{12} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{7}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \longrightarrow \frac{13}{12} \quad (n\to\infty)$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n c_n}{2n+3} = \boxed{\frac{13}{12}}^{ク}.$$

①より，$n \geqq 2$ のとき

$$c_n + \frac{1}{3^n(n+1)}$$
$$= \frac{2n+3}{3^n n(n+1)} + \frac{1}{3^n(n+1)}$$
$$= \boxed{\frac{1}{3^{n-1}\cdot n}}^{ケ}.$$

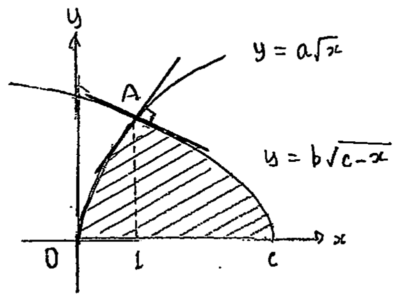
よって $n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = c_1 + \sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{3^{k-1}k} - \frac{1}{3^k(k+1)}\right\}$$
$$= \frac{35}{36} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3^n(n+1)}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{35}{36} + \frac{1}{6} = \frac{41}{36}.$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \boxed{\frac{41}{36}}^{コ}.$$

4



(1) $f(x) = a\sqrt{x}$, $g(x) = b\sqrt{c-x}$ より

$f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$, $g'(x) = -\dfrac{b}{2\sqrt{c-x}}$ …(答)

(2) 条件より

$f(1) = g(1)$, $f'(1)\cdot g'(1) = -1$.

よって

$$\begin{cases} a = b\sqrt{c-1} & \cdots ① \\ \dfrac{a}{2}\cdot\left(-\dfrac{b}{2\sqrt{c-1}}\right) = -1 & \cdots ② \end{cases}$$

②より　$ab = 4\sqrt{c-1}$

両辺に $b\,(\neq 0)$ を掛けて ①を用いると

$ab^2 = 4a$.

$a>0$, $b>0$ より，$b=2$. …(答)

①より　$a = 2\sqrt{c-1}$. …③

(3) Dの面積を S とすると

$$S = \int_0^1 a\sqrt{x}\,dx + \int_1^c 2\sqrt{c-x}\,dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{3}(c-x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^c$$
$$= \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}(c-1)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}a + \frac{1}{6}a^3 \quad (③より).$$

$S = \dfrac{40}{3}$ より　$a^3 + 4a - 80 = 0$.

$(a-4)(a^2+4a+20) = 0$.

a は実数だから　$a = 4$ …(答)
($a>0$ を満たす).

このとき ③より　$c = 5$. …(答)

交点Aの座標は　$(1, 4)$. …(答)

(4) $f(x) = 4\sqrt{x}$, $g(x) = 2\sqrt{5-x}$

$$V_x = \pi\int_0^1 \{f(x)\}^2dx + \pi\int_1^5 \{g(x)\}^2dx$$
$$= 16\pi\int_0^1 x\,dx + 4\pi\int_1^5 (5-x)\,dx$$
$$= 16\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + 4\pi\left[5x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^5$$
$$= 40\pi. \quad \cdots(答)$$

$y = f(x)$ とおくと　$x = \dfrac{y^2}{16}$ $(y \geqq 0)$,

$y = g(x)$ とおくと　$x = 5 - \dfrac{y^2}{4}$ $(y \geqq 0)$.

よって

$$V_y = \pi\int_0^4 \left\{\left(5-\frac{y^2}{4}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{16}\right)^2\right\}dy$$
$$= \pi\int_0^4 \left(25 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{15}{16^2}y^4\right)dy$$
$$= \pi\left[25y - \frac{5}{6}y^3 + \frac{3}{16^2}y^5\right]_0^4$$
$$= \frac{176}{3}\pi. \quad \cdots(答)$$