1

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を $(x-p)^2=x^2-2px+p^2$ で割った

商は，$x+a+2p$，

余りは，$(b+2ap+3p^2)x+c-ap^2-2p^3$

であり，$f(x)$ が $(x-p)^2$ で割り切れるから，

$$\begin{cases} b+2ap+3p^2=0 \\ c-ap^2-2p^3=0 \end{cases}$$

すなわち

$$\left.\begin{cases} b=-2ap-3p^2 & \cdots ① \\ c=ap^2+2p^3 & \cdots ② \end{cases}\right) \cdots (\text{答})$$

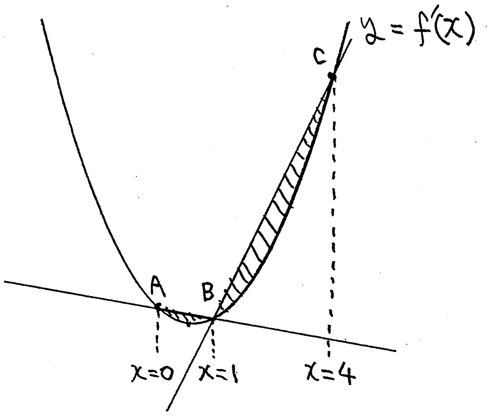
が成り立つ．

(2)
$$f'(x)=3x^2+2ax-2ap-3p^2 \quad (①\text{を用いた})$$
であるから，
$$f'\left(p+\frac{4}{3}\right)=3\left(p+\frac{4}{3}\right)^2+2a\left(p+\frac{4}{3}\right)-2ap-3p^2$$
$$=\frac{8}{3}a+8p+\frac{16}{3}$$
である．これと $f'\left(p+\frac{4}{3}\right)=0$ より
$$\frac{8}{3}a+8p+\frac{16}{3}=0$$
すなわち
$$a=-3p-2 \quad \cdots ③ \quad \cdots (\text{答})$$
が成り立つ．

(3) $p=0$ と①，②，③より，
$$a=-2,\ b=0,\ c=0$$
であるから，
$$f(x)=x^3-2x^2$$
$$f'(x)=3x^2-4x$$
である．ここで，
$$f(x)-f'(x)=(x^3-2x^2)-(3x^2-4x)$$
$$=x(x-1)(x-4)$$
であるから，$f(x)-f'(x)=0$ とすると，
$$x=0,1,4$$
である．

1

したがって，S_1+S_2 は次図の斜線部分の面積である．



$A(0,0)$, $B(1,-1)$, $C(4,32)$ であるから，直線AB，直線BCの方程式は，それぞれ

$$y=-x \quad , \quad y=11x-12$$

であり，

$$S_1+S_2=\int_0^1\{-x-(3x^2-4x)\}dx+\int_1^4\{(11x-12)-(3x^2-4x)\}dx$$

$$=-3\int_0^1 x(x-1)dx-3\int_1^4(x-1)(x-4)dx$$

$$=-3\left\{-\frac{1}{6}(1-0)^3\right\}-3\left\{-\frac{1}{6}(4-1)^3\right\}$$

$$=14. \quad \cdots(答)$$

2

(1) すべての自然数 n について「$a_n>0$ かつ $b_n>0$ である」…(＊) が成り立つことを数学的帰納法で示す。

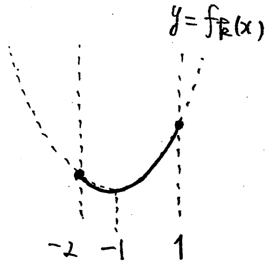
(i) $n=1$ のとき，$a_1=b_1=1$ より (＊) は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき (＊) が成り立つ，すなわち $a_k>0$ かつ $b_k>0$ とする。

このとき，$f_k(x)=a_k(x+1)^2+2b_k$ の $-2\leqq x\leqq 1$ における最大値が a_{k+1}，最小値 b_{k+1} であり，$y=f_k(x)$ のグラフは，軸が $x=-1$，下に凸の放物線より，

$$a_{k+1}=f_k(1)=4a_k+2b_k,$$

$$b_{k+1}=f_k(-1)=2b_k.$$



さらに，仮定より $4a_k+2b_k>0$，$2b_k>0$。

ゆえに，$a_{k+1}>0$ かつ $b_{k+1}>0$.

よって，$n=k+1$ のときも (＊) は成り立つ。

したがって，(i)，(ii) より すべての自然数 n について，

$a_n>0$ かつ $b_n>0$ である。　　　　（証明終り）

(2) (1) より，$b_1=1$，$b_{n+1}=2b_n$ であるから，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列である。

よって，

$$b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}\quad\cdots(\text{答})$$

(3) (1) より，$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+2b_n$.

(2) より $b_n=2^{n-1}$ であるから，$a_{n+1}=4a_n+2^n$.

両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$\dfrac{a_n}{2^n}=c_n$ より，$c_{n+1}=2c_n+\dfrac{1}{2}$.

変形して，$c_{n+1}+\dfrac{1}{2}=2\left(c_n+\dfrac{1}{2}\right)$.

数列 $\left\{c_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $c_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$，公比 2 の等比数列であるから，

$$c_n+\frac{1}{2}=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$$

$$c_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}.\quad\cdots(\text{答})$$

3

(1) 30個の球を横一列に並べ，29カ所の間のうちの1カ所に仕切りを入れると考えればよいから，求める順列の総数は

$${}_{29}C_1 = 29 \text{通り} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) 30個の球を横一列に並べ，29カ所の間のうちの2カ所に仕切りを入れると考えればよいから，求める順列の総数は

$${}_{29}C_2 = 406 \text{通り} \quad \cdots(\text{答})$$

(3) 和が30になる3つの自然数の組（順序による区別なし）のうち

3数が同じものは $\{10, 10, 10\}$ の1通り

3数のうち2数だけが同じものは

$$\{1,1,28\}, \{2,2,26\}, \cdots, \{9,9,12\}, \{11,11,8\}, \cdots \{14,14,2\}$$

の $14-1=13$ 通り

3数が相異なるものは，これらと(2)より

$$\frac{406-1-3\times 13}{3!} = 61 \text{通り}$$

したがって，求める組合せの総数は

$$1+13+61 = 75 \text{通り} \quad \cdots(\text{答})$$