1 [条件]

(i) $f(x)$ の x^3 の係数は 1.

(ii) $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$.

(1) $f(x)$ は係数が実数である3次式. (i) より

$f(x)=(x-\alpha)^2(x+a)+bx+c$　$(a, b, c$; 実数$)$ …①

と表せて, このとき

$f'(x)=2(x-\alpha)(x+a)+(x-\alpha)^2+b=(x-\alpha)(3x+2a-\alpha)+b$ …②

と表せる. ①と②と (ii) より

$b\alpha+c=0$　かつ　$b=0$

となるので, $b=c=0$ であり, ①より

$f(x)=(x-\alpha)^2(x+a)$

と表せる. ゆえに, $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる. (証明終り)

(2) (1)の結果から

$f(x)=(x-\alpha)^2(x+a)$ …③

$f'(x)=(x-\alpha)(3x+2a-\alpha)$ …④　である.

$f(\alpha+2)=0$ のとき, ③より $\alpha+2+a=0$ であるから,

$a=-(\alpha+2)$ と表せる。

よって④より

$f'(x)=(x-\alpha)(3x-3\alpha-4)$

となるので, $f'(x)=0$ となる x $(x\neq\alpha)$ は $\alpha+\frac{4}{3}$ である。…(答)

1

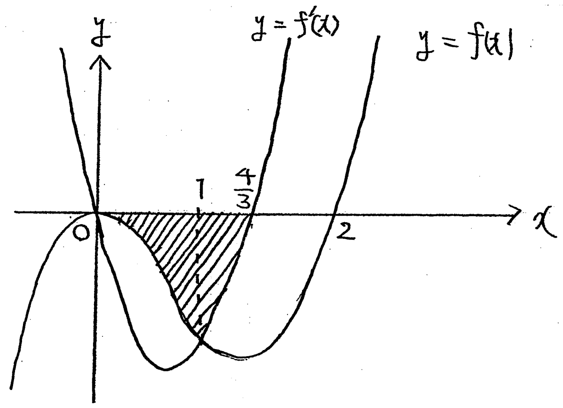
(3) (2)の条件のもとで $\alpha = 0$ とするとき

$f(x) = x^2(x-2) = x^3 - 2x^2,\quad f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4).$

$f(x) - f'(x) = x^3 - 5x^2 + 4x = x(x-1)(x-4)$ であるから，

$y \geqq f(x)$ かつ $y \geqq f'(x)$ かつ $y \leqq 0$ の表す部分は

下図の斜線部分である。



ゆえに，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 \{-f(x)\}dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \{-f'(x)\}dx$$

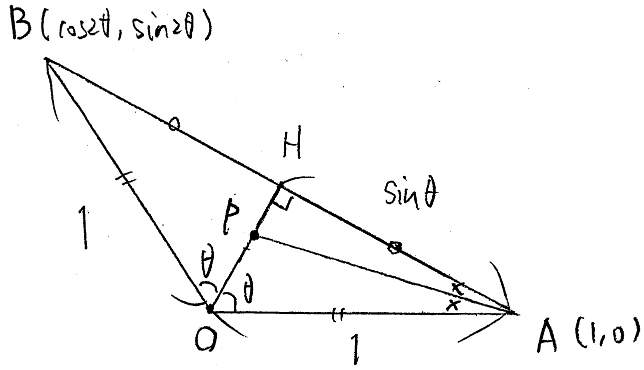
$$= \int_0^1 (-x^3 + 2x^2)dx + \int_1^{\frac{4}{3}} (-3x^2 + 4x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-x^3 + 2x^2\right]_1^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{65}{108} \quad \cdots（答）$$

$\boxed{2}$

(1)



条件より、△OABは OA=OB=1，∠AOB=2θの二等辺三角形である。

Oから辺ABに垂線OHを下ろすと，HはABの中点と一致するので，

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2},\ \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

である。さらに、点Pは△OABの内心なので，∠OAHの二等分線とOHの交点であることに注目すると、角の二等分線の性質より，

$$OP:PH=OA:AH=1:\sin\theta$$

が成り立つ。したがって，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{OP}{OP+PH}\overrightarrow{OH}$$

$$=\frac{1}{1+\sin\theta}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2},\ \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\sin\theta}(\cos^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{1+\sin\theta}(1-\sin^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta)$$

$$=\left(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

となり，

$$P\left(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

で表される。（証明終り）

2

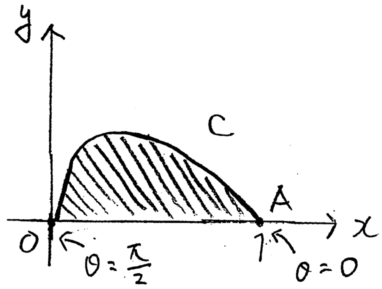
(2) 点Pが描く曲線をCとすると，

$$C:\begin{cases} x=1-\sin\theta \\ y=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\end{cases}\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

このとき

$$\frac{dx}{d\theta}=-\cos\theta<0,\quad \begin{array}{c||c} \theta & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline x & 1\to 0\end{array}$$

となるから，Dは右図の斜線部分である．



よって，求める体積をVとすると

$$V=\pi\int_0^1 y^2\,dx=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\cdot(-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\cos\theta\,d\theta$$

となる．ここで $\sin\theta=t$ とおくと

$$\cos\theta\,d\theta=dt,\quad \begin{array}{c||c} \theta & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0\to 1\end{array}$$

となるから，

$$V=\pi\int_0^1\frac{t^2(1-t^2)}{(1+t)^2}\,dt=\int_0^1\frac{t^2(1-t)}{1+t}\,dt$$

$$=\pi\int_0^1\frac{t^2-t^3}{1+t}\,dt$$

$$=\pi\int_0^1\left(-t^2+2t-2+\frac{2}{1+t}\right)dt$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2-2t+2\log|1+t|\right]_0^1$$

$$=\pi\left(-\frac{4}{3}+2\log 2\right)\ \cdots\cdots（答）$$

3

(1) 30個の球を横一列に並べ, 29カ所の間のうちの1カ所に仕切りを入れると考えればよいから, 求める順列の総数は

$$_{29}C_1 = 29 \text{ 通り} \quad \cdots (\text{答})$$

(2) 30個の球を横一列に並べ, 29カ所の間のうちの2カ所に仕切りを入れると考えればよいから, 求める順列の総数は

$$_{29}C_2 = 406 \text{ 通り} \quad \cdots (\text{答})$$

(3) 和が30になる3つの自然数の組(順序による区別なし)のうち

3数が同じものは $\{10, 10, 10\}$ の1通り

3数のうち2数だけが同じものは

$$\{1,1,28\}, \{2,2,26\}, \cdots, \{9,9,12\}, \{11,11,8\}, \cdots \{14,14,2\}$$

の $14-1=13$ 通り

3数が相異なるものは, これらと(2)より

$$\frac{406-1-3\times 13}{3!} = 61 \text{ 通り}$$

したがって, 求める組合せの総数は

$$1+13+61 = 75 \text{ 通り} \quad \cdots (\text{答})$$

4

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　$(2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi)$ より,

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

ここで, $g(x)=x\cos x-\sin x$ とおくと, $2n\pi<x<(2n+1)\pi$ において, $g(x)$ と $f'(x)$ の符号は一致する.

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x$$
$$=-x\sin x<0.$$

であるから, この区間で $g(x)$ は単調に減少する.

さらに, $g(2n\pi)=2n\pi>0$, $g((2n+1)\pi)=-(2n+1)\pi<0$ であるから, $g(x)=0$ となる x が $2n\pi<x<(2n+1)\pi$ の範囲にただ1つ存在し, その値を α とすると, $f(x)$ の増減は右下の表のようになる.

x	$2n\pi$	$\cdots$	α	$\cdots$	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって, $f(x)$ が最大となる x の値がただ1つ存在することが示された.

（証明終り）

(2) (1) の α が x_n であり, x_n は,

$g(x_n)=0$ すなわち $x_n\cos x_n-\sin x_n=0$ より $\tan x_n=x_n$

を満たす. これより, $\dfrac{n}{\tan x_n}=\dfrac{n}{x_n}$ であり,

$2n\pi<x_n<(2n+1)\pi$ より, $\dfrac{n}{(2n+1)\pi}<\dfrac{n}{x_n}<\dfrac{1}{2\pi}$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n+1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\pi}=\frac{1}{2\pi}$ であるから, はさみうちの原理より,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}=\frac{1}{2\pi}$, すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}=\frac{1}{2\pi}$. …(答)

5

(1) $p=3$ のとき，$x_1=\dfrac{1}{2^3+1}=\dfrac{1}{9}$.

$$x_2=|2x_1-1|=\left|2\cdot\frac{1}{9}-1\right|=\frac{7}{9},$$
$$x_3=|2x_2-1|=\left|2\cdot\frac{7}{9}-1\right|=\frac{5}{9},$$
$$x_4=|2x_3-1|=\left|2\cdot\frac{5}{9}-1\right|=\frac{1}{9}.$$

$x_4=x_1$ であり，数列 $\{x_n\}$ は周期 3 で $\frac{1}{9},\frac{7}{9},\frac{5}{9}$ をくり返す．したがって，m を正の整数として，

$$x_{3m-2}=\frac{1}{9},\ x_{3m-1}=\frac{7}{9},\ x_{3m}=\frac{5}{9}.\ \cdots\text{(答)}$$

(2) $x_1=\dfrac{1}{2^p+1}<\dfrac{1}{2}$ であり，$x_2=1-2x_1=\dfrac{2^p-1}{2^p+1}$. $\cdots$ ①

ここで，$k=2,3,\cdots,p,p+1$ のとき

$$x_k=\frac{2^p-(2^{k-1}-1)}{2^p+1}\ \cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $k=2$ のとき，① より $(*)$ 成立．

(ii) $k=l$ $(l=2,3,\cdots,p)$ のとき，$(*)$ 成立と仮定すると，

$$x_l=\frac{2^p-(2^{l-1}-1)}{2^p+1}.$$

$k=l+1$ のとき，

$$\begin{aligned}x_{l+1}&=|2x_l-1|\\&=\left|\frac{2\cdot2^p-2^l+2}{2^p+1}-\frac{2^p+1}{2^p+1}\right|\\&=\left|\frac{2^p-2^l+1}{2^p+1}\right|\\&=\frac{2^p-(2^l-1)}{2^p+1}\end{aligned}$$

であり，$(*)$ は成り立つ．

以上 (i), (ii) より，$k=2,3,\cdots,p,p+1$ のとき $(*)$ は成立して，$x_{p+1}=\dfrac{1}{2^p+1}=x_1$.（証明終り）