I

(1) $\log_3 27=\boxed{3}$, $\log_5\frac{1}{25}=\boxed{-2}$, $\log_9 3=\boxed{\frac{1}{2}}$ …(ア)(イ)(ウ)(答)

$\log_3 27+\log_5 25-2\log_9\frac{1}{3}=3+2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=6$ より,

$\log_2 x=6$　から　$x=2^6=\boxed{64}$. …(エ)(答)

(2) $\boxed{「x^2は整数ならば，xは整数である」}$. …(オ)(答)

反例として，$x=\sqrt{2}$ などがあるので，$\boxed{偽}$. …(カ)(答)

(3) $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\geqq 2)$ より，

$a_2=S_2-S_1=2^3-1^3=\boxed{7}$. …(キ)(答)

$a_{100}=S_{100}-S_{99}=100^3-99^3=\boxed{29701}$. …(ク)(答)

(4) $(a+bi)^2=1+\sqrt{3}i$ より，$a^2-b^2+2abi=1+\sqrt{3}i$

a, b は実数より，$\begin{cases} a^2-b^2=1 & \cdots① \\ 2ab=\sqrt{3} & \cdots② \end{cases}$

よって，①，②より，　$(a-bi)^2=a^2-b^2-2abi=\boxed{1-\sqrt{3}i}$. …(ケ)(答)

$a\neq 0$ より，②から $b=\frac{\sqrt{3}}{2a}$ とし，①に代入して b を消去すると，

$$a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2=1\quad よって，(2a^2+1)(2a^2-3)=0.$$

$a>0$ から，$a=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$. …(コ)(答)

これを②に戻して，$b=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. …(サ)(答)

(5)
$$\begin{array}{rl} & 2x-3y=1 \\ - & 2\cdot 2-3\cdot 1=1 \\ \hline & 2(x-2)-3(y-1)=0 \end{array}$$
$$2(x-2)=3(y-1)$$

2, 3は互いに素なので，$x-2=3k$, $y-1=2k$ (kは整数) とおけるので，

$x=\boxed{3}k+\boxed{2}$, $y=\boxed{2}k+\boxed{1}$ (kは整数). …(シ)(ス)(セ)(ソ)(答)

同様にして，
$$\begin{array}{rl} & 2x-3y=2020 \\ - & 2\cdot 4040-3\cdot 2020=2020 \\ \hline & 2(x-4040)-3(y-2020)=0 \end{array}$$
$$2(x-4040)=3(y-2020)$$

2, 3は互いに素なので，$x-4040=3k$, $y-2020=2k$ (kは整数) とおけるので，

$x=\boxed{3}k+\boxed{4040}$, $y=\boxed{2}k+\boxed{2020}$ (kは整数). …(タ)(チ)(ツ)(テ)(答)

$\boxed{注意}$ (シ)～(テ) は答えに一意性はなく，他の表し方もある.

II (1) 三角形ABCに余弦定理を用いて

$$BC^2=(\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}\cos60^\circ=42.$$

$$BC=\boxed{\sqrt{42}}$$ …(ト)(答)

三角形ABCの面積をS，内接円の半径をrとする.

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}\sin60^\circ=\boxed{\frac{5\sqrt{3}}{2}}$$ …(ナ)(答)

また

$$S=\frac{1}{2}(\sqrt{42}+5\sqrt{2}+\sqrt{2})r=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{21}+6)r$$

であるから

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{21}+6)r$$

$$r=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}(6+\sqrt{21})}=\frac{5\sqrt{3}(6-\sqrt{21})}{\sqrt{2}(36-21)}=\boxed{\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{14}}{2}}$$ …(ニ)(答)

Ⅱ(2)

$$f(x)=x^2-2(\sin\theta+\cos\theta)x+\frac{3}{2}$$
$$=\{x-(\sin\theta+\cos\theta)\}^2-(\sin\theta+\cos\theta)^2+\frac{3}{2}$$

上式より

$$p=\boxed{\sin\theta+\cos\theta}$$ …(ヌ)(答)

$$q=-(\sin\theta+\cos\theta)^2+\frac{3}{2}$$

放物線 $y=f(x)$ と x 軸の交点が1つ以上存在する条件は

$$q\leqq 0$$
$$-(\sin\theta+\cos\theta)^2+\frac{3}{2}\leqq 0$$
$$-\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta+\frac{3}{2}\leqq 0$$
$$\sin 2\theta\geqq\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $0\leqq 2\theta\leqq 2\pi$ であることと上式より

$$\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$$

$$\boxed{\frac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\frac{5}{12}\pi}$$ …(ネ)(答)

また，$p=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$ より

$$\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\leqq p\leqq\sqrt{2}\cdot 1$$

$$\boxed{-1\leqq p\leqq\sqrt{2}}$$ …(ノ)(答)

点P(p,q)の軌跡は

曲線 $q=\boxed{-p^2+\frac{3}{2}}$ …(ハ)(答)

の $-1\leqq p\leqq\sqrt{2}$ の部分である.

Ⅱ(3)

3回の移動の間に1度もA_1に戻らない確率は

$$1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

3回の移動の間に少なくとも1度はA_1に戻る確率は

$$1-\frac{9}{16}=\boxed{\frac{7}{16}}$$ …(ヒ)(答)

n回の移動の間に少なくとも1度はA_1に戻る確率は

$$1-1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\boxed{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$$ …(フ)(答)

$1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}>\frac{99}{100}$ とすると

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$$

$$\log_{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}<\log_{10}\frac{1}{100}$$

$$(n-1)(\log_{10}3-2\log_{10}2)<-2$$

$$(n-1)(0.4771-2\times0.3010)<-2$$

$$-0.1249(n-1)<-2$$

$$n-1>\frac{2}{0.1249}\fallingdotseq 16.01\cdots$$

$$n>17.01\cdots$$

求めるnは

$$n=\boxed{18}$$ …(ヘ)(答)

III

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$の始点をAにすると，

$-\overrightarrow{AO}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO})=\vec{0}$ より，

$$\overrightarrow{AO}=\boxed{\frac{1}{4}}\overrightarrow{AB}+\boxed{\frac{1}{4}}\overrightarrow{AC}+\boxed{\frac{1}{4}}\overrightarrow{AD}.$$ …(ホ)(マ)(ミ)(答)

(2) 三角形ABCにおいて，$|\overrightarrow{BC}|=a$ より，

$|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=a^2$.

$|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2=a^2$.

$1-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+1=a^2$.

よって，　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{\dfrac{2-a^2}{2}}$. …(ム)(答)

(3) $|\overrightarrow{AO}|^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|^2$

$=\dfrac{1}{16}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=\dfrac{1}{16}\left(1^2+1^2+1^2+2\cdot\dfrac{2-a^2}{2}\cdot 3\right)$　$(\because\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=\boxed{\dfrac{1}{16}(9-3a^2)}$. …(メ)(答)

(2)と同様にして，三角形ABCにおいて，$|\overrightarrow{AC}|=1$ より，

$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|^2=1^2$.

$|\overrightarrow{BC}|^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BA}|^2=1$.

$a^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+1=1$.

よって，　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$.

$|\overrightarrow{BO}|^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}|^2$

$=\dfrac{1}{16}(|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA})$

$=\dfrac{1}{16}\left(1^2+a^2+a^2+2\cdot\dfrac{a^2}{2}+2\cdot\dfrac{a^2}{2}+2\cdot\dfrac{a^2}{2}\right)$　$(\because\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA})$

$=\boxed{\dfrac{1}{16}(5a^2+1)}$. …(モ)(答)

(4) $a=1$ のとき，$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{BO}|^2=\dfrac{3}{8}$ なので，三角形AOBについて余弦定理より，

$$\cos\angle AOB=\frac{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}-1^2}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}}=\boxed{-\frac{1}{3}}.$$ …(ヤ)(答)

IV (1) $\boxed{(A)}$ …(ユ)(答)

(2) 生徒番号(k) $(k=1,2,3,\cdots,10)$ の理科の得点を x_k，社会の得点を y_k とする。

$$\bar{x}=\frac{10+30+40+90+70+60+70+x_8+50+80}{10}=50$$

よって $x_8=\boxed{0}$ ---(ヨ)(答)

$$S_x^2=\frac{10^2+30^2+40^2+90^2+70^2+60^2+70^2+0^2+50^2+80^2}{10}-50^2$$

$$=\boxed{800}$$ ---(ラ)(答)

(3) $$\bar{y}=\frac{100+70+60+y_4+40+50+20+50+y_9+70}{10}=60 \text{ より}$$

$y_4+y_9=140$ …①

$$S_y^2=\frac{100^2+70^2+60^2+y_4^2+40^2+50^2+20^2+50^2+y_9^2+70^2}{10}-60^2=500 \text{ より}$$

$y_4^2+y_9^2=10600$ …②

①, ②より $(y_4, y_9)=(50,90)$ または $(90,50)$

散布図より $y_4=\boxed{50}$, $y_9=\boxed{90}$ ---(リ)(ル)(答)

(4) $$r=\frac{S_{xy}}{S_x\cdot S_y}$$

$$=\frac{-270}{\sqrt{800}\sqrt{500}}$$

$$=\boxed{-\frac{27\sqrt{10}}{200}}$$ ---(レ)(答)

V

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

となり、増減を調べると、

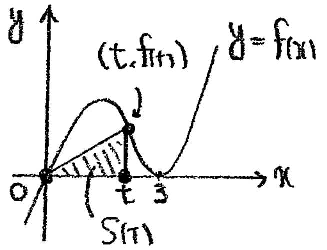
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

これより

$x=1$ のとき極大値 $\boxed{4}$ ・・・(D)(答)

$x=3$ のとき極小値 $\boxed{0}$ ・・・(ワ)(答)

(2) $a=3$ より $0<t<3$



$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot f(t)$

$=\frac{1}{2}t(t^3-6t^2+9t)$

$=\frac{1}{2}(t^4-6t^3+9t^2)$

となる。

$S'(t)=\frac{1}{2}(4t^3-18t^2+18t)$

$=t(2t-3)(t-3)$

となり増減を調べると、

t	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{81}{32}$	↘	

これより、

最大値 $S^*=\frac{81}{32}$ ・・・(答)

また、

$S(t)=S^*$ となるのは $t=\frac{3}{2}$ ・・・(答)

Vつづき

(3) (2)より

$$t^* = \frac{3}{2}$$

であり

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$$

であるから，2点 $(0, 0)$，$\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)$ を通る直線 l の方程式は

$$y = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2}}x$$

$$y = \frac{9}{4}x$$

となる．直線 l と曲線 $y = f(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^3 - 6x^2 + 9x = \frac{9}{4}x$$

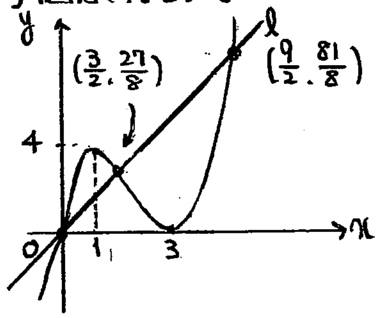
$$x^3 - 6x^2 + \frac{27}{4}x = 0$$

$$x\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$x = 0,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{2}$$

である．

(1)の増減表から図示すると，



---(答)

(4) 求める面積 T とすると

$$T = \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{f(x) - \frac{9}{4}x\right\}dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} \left\{\frac{9}{4}x - f(x)\right\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^3 - 6x^2 + \frac{27}{4}x\right)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} \left(-x^3 + 6x^2 - \frac{27}{4}x\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{27}{8}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{27}{8}x^2\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{999}{64}}$$

---(ﾃ)(答)