I

(i) 本問を次のように読み替えて解答する.

> zを定数とし, $a_1=1$である数列$\{a_n\}$が漸化式$a_{n+1}=za_n-z^2$を満たすとする.
> $z=\dfrac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}}\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{(3)}}}{\boxed{(4)}}i$のとき, 一般項が$a_n=1$ $(n=1,2,\cdots)$となる.

この数列の一般項が$a_n=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$であるとする.
$a_n=a_{n+1}=1$であるので漸化式から　$1=z-z^2$　…①
よって　$z^2-z+1=0$　となって

$$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

zがこの値であるとする. $a_k=1$であれば漸化式と①から

$$a_{k+1}=z\cdot1-z^2=z-z^2=1$$

を得るので「$a_k=1$であれば$a_{k+1}=1$」
さらに$a_1=1$であるので数学的帰納法により

一般項は　$a_n=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$

以上により

$$z=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pm\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}i \qquad \cdots (1)(2)(3)(4)$$

(注) $z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$であっても, 初項の値によってはこの漸化式を満たす数列$\{a_n\}$のすべての項の値が1となるとは限らない.

I（つづき）

また本問を次のような主旨の問題であると考えてよいかも知れない。

> z を複素数とし，数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=za_n-z^2$ を満たすとする．
> 一般項が $a_n=1\ (n=1,2,\cdots)$ のとき $z=\dfrac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}}\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{(3)}}}{\boxed{(4)}}i$ となる．

$a_n=a_{n+1}=1$ であるので漸化式から $1=z-z^2$ $\cdots$①

したがって　$z^2-z+1=0$ となって

$$z=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pm\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}i \qquad (1),(2),(3),(4)$$

z がどちらの値であっても，$a_k=1$ であれば漸化式と①から

$$a_{k+1}=z-z^2=1$$

したがって「$a_k=1$ ならば $a_{k+1}=1$」

与えられた条件により $a_1=1$ も成り立つので，数学的帰納法により

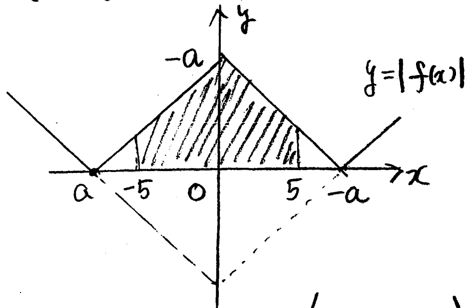
$$a_n=1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

となっている．

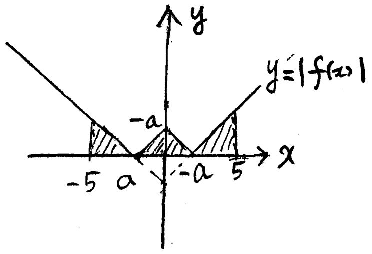
I (つづき2)

(ii) $f(x)=|x|+a$. $I=\int_{-5}^{5}|f(x)|dx$ とおくと, I は下図の斜線部分の面積である.

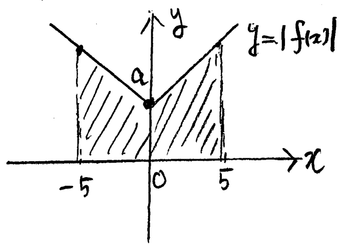
(ア) $a \leqq -5$ のとき

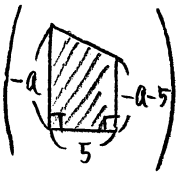


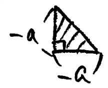
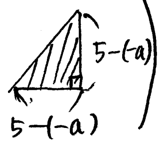
(イ) $-5 \leqq a \leqq 0$ のとき



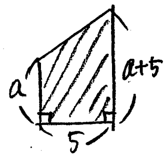
(ウ) $0 \leqq a$ のとき



(ア)のとき, $I=2\times\Big($  $\Big)=2\times\frac{1}{2}\{(-a)+(-a-5)\}\times5=-10a-25$

(イ)のとき, $I=2\times\Big($  $+$  $\Big)=2\times\left\{\frac{1}{2}(-a)^2+\frac{1}{2}(5+a)^2\right\}$

$=2a^2+10a+25$.　　$I'=4a+10$

(ウ)のとき, $I=2\times\Big($  $\Big)=2\times\frac{1}{2}\{a+(a+5)\}\times5=10a+25$

(ア)〜(ウ)より I の増減は以下の通り

a	…	-5	…	$-\frac{5}{2}$	…	0	…
I'	$-$		$-$	0	$+$		$+$
I	↘		↘		↗		↗

I が最小となる a の値は

$$a=\frac{\boxed{-5}}{\boxed{2}}$$

…(5)〜(7)

I（つづき3）

(iii) $f(x)=4x^3-3x$ より $f'(x)=12x^2-3$ であるから,

$$f'(\sin\theta)=12\sin^2\theta-3=12\times\frac{1-\cos2\theta}{2}-3$$
$$=3-6\cos2\theta$$

よって $f'(\sin\theta)=3-3\sqrt{2}$ となると

$$\cancel{3}-6\cos2\theta=\cancel{3}-3\sqrt{2}$$
$$\therefore\ \cos2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ここで $0<2\theta<2\pi$ より　$2\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$ となって

$$\theta=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}\pi,\quad\frac{\boxed{7}}{\boxed{8}}\pi$$

…(8),(9),(10),(11)

また，3倍角の公式より

$$f(\cos\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
$$=\cos3\theta \text{ より}$$

$f(\cos\theta)=\frac{1}{2}$ とすると　$\cos3\theta=\frac{1}{2}$

ここで $0<3\theta<3\pi$ より　$3\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi$ となって

$$\theta=\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}}\pi,\ \frac{\boxed{5}}{\boxed{9}}\pi,\ \frac{\boxed{7}}{\boxed{9}}\pi$$

…(12),(13),(14),(15),(16),(17)

I（つづき4）

(iv)（与式）$=\sum_{r=0}^{5} {}_5C_r \cdot \left\{\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2\right\}^r$

$=\sum_{r=0}^{5} {}_5C_r \cdot 3^r \cdot 1^{5-r}$

$=(3+1)^5$　（二項定理より）

$=\boxed{1024}$　…(18), (19), (20), (21)

I (つづき)

(v) $a_1=4>0$, $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n^3$ より、帰納的に $a_n>0$ なので、

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\left(\frac{1}{4}a_n^3\right)$$
$$=\log_2 a_n^3+\log_2\frac{1}{4}$$
$$=\boxed{3}\log_2 a_n-\boxed{2} \quad \cdots(22),(23)$$

ここで、$b_n=\log_2 a_n$ とすると、$b_1=\log_2 a_1=\log_2 4=2$ であり、

$$b_{n+1}=3b_n-2$$
$$b_{n+1}-1=3(b_n-1)$$

なので、数列 $\{b_n-1\}$ は、初項 $b_1-1=1$, 公比3の等比数列であるから、 $b_n-1=1\cdot 3^{n-1}$

$$b_n=3^{n-1}+1$$
$$\log_2 a_n=3^{n-1}+1$$
$$a_n=2^{3^{n-1}+1}$$

$a_n>2\cdot 10^{30100}\ (>0)$ を考えると、底 $10>1$ より、

$$\log_{10} a_n>\log_{10}(2\cdot 10^{30100})$$
$$(3^{n-1}+1)\log_{10}2>\log_{10}2+30100$$
$$3^{n-1}\cdot 0.301>30100$$
$$3^{n-1}>100000 \quad \cdots①$$

ここで、3^{n-1} は、底 $3>1$ より単調増加し、

$$3^{10}<100000<3^{11}$$

なので、n: 自然数より、$n-1$: 自然数なので①より、

$$n-1\geqq 11$$
$$n\geqq 12$$

ゆえに、求める n は、$n=\boxed{1\,2}$ $\cdots(24),(25)$

(参考) ①において、両辺に底が $10\ (>1)$ の対数をとると、

$$(n-1)\log_{10}3>\log_{10}10^5$$
$$0.477(n-1)>5$$
$$n>\frac{5}{0.477}+1\fallingdotseq 11.48$$

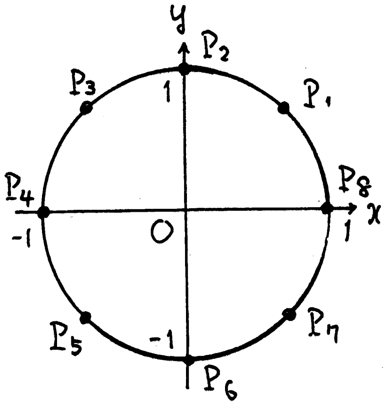
であり、n: 自然数より、$n\geqq 12$

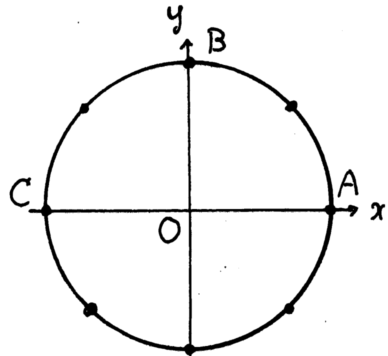
II

$P_n\left(\cos\frac{n}{4}\pi,\ \sin\frac{n}{4}\pi\right)$ $(n=1,2,\cdots,8)$ とする. 最初に動点Aは P_8 に, 動点Bは P_2 に, 動点Cは P_4 にあり, 試行Tにより移動を繰り返す. つまり8枚の硬貨 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_8$ を投げ,

$\begin{cases} Q_n \text{が表なら} P_n \text{にある動点を正の向きに} \\ Q_n \text{が裏なら} P_n \text{にある動点を負の向きに} \end{cases}$

円周上を隣の頂点へ移動させる.





(最初の状態)

(i) 試行Tを2回行って, AとBが一致しているのは次のいずれかの場合である.

1回目	2回目	確率
Q_8表, Q_2裏	任意	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
Q_8表, Q_2表	Q_1表, Q_3裏	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$
Q_8裏, Q_2裏	Q_7表, Q_1裏	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

(記載のない硬貨の裏表は任意)

よってその確率は $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$ …(26),(27)

試行Tを2回行ってAとCが一致するのは

$\begin{cases} \text{AとCがともに} P_2 \text{にある (確率} \left(\frac{1}{2}\right)^4) \\ \text{AとCがともに} P_6 \text{にある (確率} \left(\frac{1}{2}\right)^4) \end{cases}$

のいずれかの場合であり, その確率は $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$ …(28),(29)

試行Tを2回行って, A, B, Cが一致する(P_2にある)のは

1回にQ_8表, Q_4裏,　2回目にQ_1表, Q_3裏　(他は任意)

の場合で, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{\boxed{1}}{\boxed{16}}$ …(30),(31)(32)

(ii) 事象E：2回操作Tを行ってAとBが一致している(確率 $\frac{3}{8}$)

事象F：2回操作Tを行ってAとBとCが一致している(確率 $\frac{1}{16}$)

II（つづき）

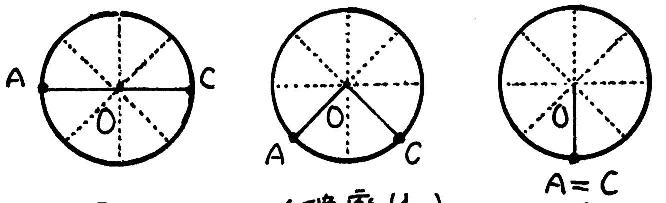
とする．$E\cap F=F$ であるので，求める条件つき確率は

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{P(F)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}\qquad\cdots(33),(34)$$

(iii) n 回目の操作 T を終えて

$$\begin{cases}\angle AOC=\pi \text{ である確率を } x_n\\ \angle AOC=\frac{\pi}{2} \text{ である確率を } y_n\\ \angle AOC=0 \text{ である確率を } p_n\end{cases}$$

とおき，$x_0=1$，$y_0=0$，$p_0=0$ と定める．



（確率 x_n）　（確率 y_n）　（確率 p_n）

$n+1$ 回目の操作 T による A，C の動きを考えると

$$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{4}y_n\\ y_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}y_n\\ p_{n+1}=\frac{1}{4}y_n+p_n\end{cases}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

これらを用いて x_4，y_4，p_4 を求める計算は次のようになる．

n	0	1	2	3	4
x_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{16}=\frac{17}{64}$
y_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{16}=\frac{3}{8}$
p_n	0	0	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{16}+\frac{1}{4}=\frac{23}{64}$

したがって　$p_4=\frac{\boxed{23}}{\boxed{64}}$　$\cdots(35)(36),(37)(38)$

(iv)　$p_5=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{23}{64}=\frac{6+23}{64}=\frac{\boxed{29}}{\boxed{64}}$　$\cdots(39)(40),(41)(42)$

《参考》 $x_{n+1}+y_{n+1}+p_{n+1}=x_n+y_n+p_n$ から $x_n+y_n+p_n=1$ が導かれるので，$\angle AOC=0,\frac{\pi}{2},\pi$ のいずれか1つが成り立つことがわかる．

Ⅲ. (i)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$
$$= (x, f(x)) + t(2x - x,\ f(x) + xf'(x) - f(x))$$
$$= (x, f(x)) + t(x,\ xf'(x))$$
$$= (x(t+\boxed{1}),\ f(x) + txf'(x)) \quad \cdots(43)$$

(ii) $f'(x) = x$ なので、

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = x^2(t+1)^2 + \{f(x) + tx^2\}^2$$
$$= x^2(x^2+1)t^2 + 2x^2\{f(x)+1\}t + x^2 + \{f(x)\}^2$$
$$= x^2(x^2+1)\left\{t + \frac{f(x)+1}{x^2+1}\right\}^2 - \frac{x^2\{f(x)+1\}^2}{x^2+1} + x^2 + \{f(x)\}^2$$

$|\overrightarrow{OP}| \geqq 0$ より、$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるとき、$|\overrightarrow{OP}|^2$ も最小となるので、求める t は、

$$t = -\frac{f(x)+1}{x^2+1}$$
$$= -\frac{\frac{1}{2}x^2+2+1}{x^2+1}$$
$$= -\frac{x^2+\boxed{6}}{\boxed{2}(x^2+\boxed{1})} \quad \cdots(44),(45),(46)$$

このときの P を P_0 とすると、

$$|\overrightarrow{OP_0}|^2 = -\frac{x^2(\frac{1}{2}x^2+2+1)^2}{x^2+1} + x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2+2\right)^2$$
$$= -\frac{x^2(x^2+6)^2}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + 4$$
$$= -\frac{x^6+12x^4+36x^2}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}(x^4+12x^2+16)$$
$$= \frac{-x^6-12x^4-36x^2+x^6+13x^4+28x^2+16}{4(x^2+1)}$$
$$= \frac{x^4-8x^2+16}{4(x^2+1)}$$
$$= \frac{(x^2-4)^2}{4(x^2+1)}$$

であり、$|\overrightarrow{OP_0}| \geqq 0$ より、求める $|\overrightarrow{OP}|$ は、

$$|\overrightarrow{OP_0}| = \frac{|x^2-\boxed{4}|}{\boxed{2}\sqrt{x^2+\boxed{1}}} \quad \cdots(47),(48),(49)$$

Ⅲ（つづき）

(iii) $\overrightarrow{AB}=(x,\ xf'(x))$
$=(x,\ x^2)$ なので、$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OP_0}$ であることから、

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OP_0}|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2(x^2+1)}\cdot\frac{|x^2-4|}{2\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{1}{4}|x||x^2-4|$ （$x>0$ より、$x^2>0,\ x^2+1>0$ なので、$\sqrt{x^2(x^2+1)}=\sqrt{x^2}\sqrt{x^2+1}$）

$=\frac{1}{4}x(4-x^2)$ （$0<x<2$ より $x>0,\ x^2-4<0$ であるから）

$=g(x)$ とすると、

$g'(x)=-\frac{1}{4}(3x^2-4)$

$=-\frac{3}{4}\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

なので、増減表は右表。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(2)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって、求める x は、

$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}$ …(50),(51),(52)

また、このとき、

$S=g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(4-\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{8}{3}$

$=\frac{\boxed{4}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}$ …(53),(54),(55)

［S の求め方の別解］

$A\left(x,\ \frac{1}{2}x^2+2\right),\ B\left(2x,\ \frac{3}{2}x^2+2\right)$ なので、

$S=\frac{1}{2}\left|x\left(\frac{3}{2}x^2+2\right)-2x\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}x^3-2x\right|$

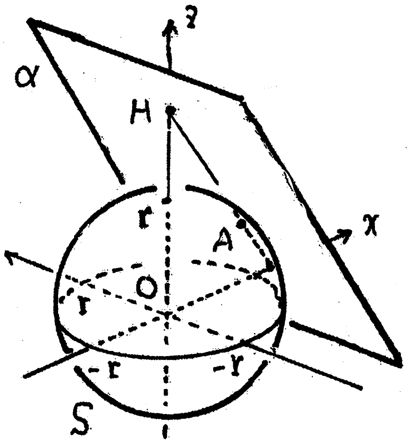
$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}x(x^2-4)\right|$

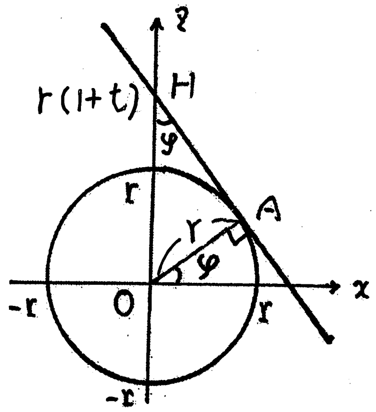
$=\frac{1}{4}|x||x^2-4|$

$=\frac{1}{4}x(4-x^2)$ （$0<x<2$ より、$x>0,\ x^2-4<0$ であるから）

（以下、同じ）

IV





（zx平面）

$t=\dfrac{h}{r}$より，$r+h=r(1+t)$　よって　$H(0,0,r(1+t))$

(i) $\triangle OAH$において三平方の定理より

$AH=\sqrt{OH^2-OA^2}=r\sqrt{(1+t)^2-1^2}=r\sqrt{t^2+2t}$

$\angle OHA=\varphi$とおくと，Aのx座標とz座標はともに正であるから

$0°<\varphi<90°$であり，

$\cos\varphi=\dfrac{AH}{OH}=\dfrac{r\sqrt{t^2+2t}}{r(1+t)}=\dfrac{\sqrt{t^2+2t}}{1+t}$，$\sin\varphi=\dfrac{OA}{OH}=\dfrac{r}{r(1+t)}=\dfrac{1}{1+t}$

$\overrightarrow{OA}=r(\cos\varphi,0,\sin\varphi)$であるから，$A$の座標は

$A\left(\boxed{\dfrac{\sqrt{t^2+2t}}{1+t}}r,\ 0,\ \boxed{\dfrac{1}{1+t}}r\right)$　　…(ア),(イ)

IV（つづき1）

(ii) $\vec{a}=\dfrac{1+t}{r}\overrightarrow{OA}=(\sqrt{t^2+2t},0,1)$ とおくとこれは平面 α の法線ベクトルである．α の方程式は

$$\sqrt{t^2+2t}\cdot x+0y+1\cdot(z-r(1+t))=0$$

$$\boxed{\sqrt{t^2+2t}}\,x+z=\boxed{(1+t)}\,r \quad \cdots(ウ)(エ)$$

(iii) 同様に $\vec{b}=(0,\sqrt{t^2+2t},1)$ は平面 β の法線ベクトルである．

$$\begin{cases}|\vec{a}|=\dfrac{1+t}{r}|\overrightarrow{OA}|=1+t\\ |\vec{b}|=1+t\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1\end{cases}$$

より，$\cos\theta=\boxed{\dfrac{1}{(1+t)^2}}$ $\cdots$(オ)

（$\cos\theta>0$ であるので，$0^\circ<\theta<90^\circ$ を満たしている．）

(iv) $t=\dfrac{h}{r}=\dfrac{400}{6400}=\dfrac{1}{16}$ より

$$\cos\theta=\frac{1}{(1+\frac{1}{16})^2}=\frac{16^2}{17^2}\fallingdotseq 0.8858$$

三角比の表より，$\theta\fallingdotseq\boxed{28}^\circ$ $\cdots$(カ)

IV (つづき2)

(補足) (iv)について, 正確に書くと, 以下のようになる.

(iv) $r=6400$, $h=400$ のとき $t=\frac{h}{r}=\frac{1}{16}$ であり

$$\cos\theta=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{16}\right)^2}=\left(\frac{16}{17}\right)^2=\frac{256}{289}=0.8858\cdots$$

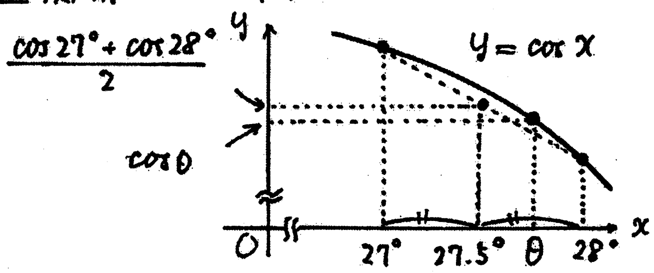
ここで三角比の表から $\cos 27^\circ=0.8910$, $\cos 28^\circ=0.8829$ を得る. これらの平均は 0.88695 であるので

$$\frac{\cos 27^\circ+\cos 28^\circ}{2}>\cos\theta$$

が成り立つ. そこで曲線 $y=\cos x$ $(0^\circ<x<90^\circ)$ と

$\begin{cases}\text{曲線上の2点} (27^\circ, \cos 27^\circ), (28^\circ, \cos 28^\circ) \text{を結ぶ線分の中点,} \\ \text{曲線上の点} (\theta, \cos\theta)\end{cases}$

の位置関係に注目する.



この曲線が上に凸で, $y=\cos x$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ が単調減少であるので, θ を度数法で表したとき, 最も近い整数は

$$\theta \fallingdotseq \boxed{28}^\circ \quad \cdots(\text{カ})$$

となる.