[1]

(1) $a=3$ のとき，自然数 b, c は，

$$9+b^2+3b=c^2 \quad \cdots ①, \qquad 3<b \quad \cdots ②$$

を満たす．① は $4c^2-(4b^2+12b)=36$ から

$$(2c)^2-(2b+3)^2=27 \quad \text{すなわち} \quad (2c+2b+3)(2c-2b-3)=3^3$$

と変形できる．② から $2c+2b+3>11$ であるから，

$$2c+2b+3=27 \quad \text{かつ} \quad 2c-2b-3=1$$

これを解いて，$b=5$，$c=\boxed{7}$ …(1)(答)

(2) 和が 21 となる 2 つの自然数を x, y とする．$x+y=21$ から

$$xy=x(21-x)=-\left(x-\frac{21}{2}\right)^2+\left(\frac{21}{2}\right)^2$$

x は自然数なので，$x=10, 11$ のとき xy は最大となり，最大値は

$$10(21-10)=\boxed{110}$$ …(2)〜(4)(答)

よって，$a+b=21$，$a<b$ のとき，$1 \leqq a \leqq 10$ に注意して，ab のとり得る値の範囲は $20 \leqq ab \leqq 110$ である．このとき，

$$c^2=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab=21^2-ab=441-ab$$

から c^2 のとり得る値の範囲は

$$331 \leqq c^2 \leqq 421$$

である．この範囲にある平方数は $19^2=361$，$20^2=400$ である．

$c=19$ のとき，$ab=21^2-19^2=5 \cdot 16$．$a+b=21$ と合わせて，$a=5$，$b=16$ である．

$c=20$ のとき，$ab=21^2-20^2=41$ で条件を満たす a, b は存在しない．

したがって，$c=\boxed{19}$ …(5)(6)(答)

[1]（つづき 2）

(3) ①から $(a+b)^2-ab=c^2$.　$c=a+b-p$ を代入して，

$$(a+b)^2-ab=(a+b)^2-2(a+b)p+p^2$$

$$ab-2ap-2bp+p^2=0.$$

$$(a-\boxed{2}p)(b-\boxed{2}p)=\boxed{3}p^2$$ …(7)〜(9)(答)

p が 5 以上の素数のとき，3 も素数であることと $a-2p<b-2p$ に注意すると，以下の場合が考えられる．

$b-2p$	$3p^2$	p^2	$3p$	$-p$	-3	-1
$a-2p$	1	3	p	$-3p$	$-p^2$	$-3p^2$

これより

b	$3p^2+2p$	p^2+2p	$5p$	p	$2p-3$	$2p-1$
a	$2p+1$	$2p+3$	$3p$	$-p$	$-p^2+2p$	$-3p^2+2p$
	(ア)	(イ)	(ウ)			

このうち条件の $1\leqq a<b$ を満たすものは (ア)(イ)(ウ) であり，a, b が定まれば c も定まるので，a, b, c の組は $\boxed{3}$ 個ある．　… (10) (答)

また，$p=7$ のとき，(ア), (イ), (ウ) について a, b の値は次の通り．

b	161	63	35
a	15	17	21
	(ア)	(イ)	(ウ)

よって，$c=a+b-p$ が最小となるのは (ウ) の場合であり，

$a=\boxed{21}$，$b=\boxed{35}$ … (11)〜(14)(答)

[1]（つづき2）

（(1)の別解）

① $b^2+3b+9-c^2=0$ を b の2次方程式とみると，b は自然数であるから，この方程式の判別式 D が平方数となることが必要である．

$$D=3^2-4\cdot1\cdot(9-c^2)=4c^2-27=d^2.$$

（d は0以上の整数）とおくと，

$$(2c-d)(2c+d)=27.$$

$2c-d<2c+d$，$2c+d>0$ に注意して，次の場合が考えられる．

$2c+d$	27	9
$2c-d$	1	3

これより，$(c,d)=(7,13),(3,3)$ を得る．

$c=7$ のとき ①は $(b-5)(b+8)=0$ となり $b=5$（$a<b$ を満たしている）．

$c=3$ のとき ①は $b(b+3)=0$ となり 自然数 b は存在しない．

以上により $c=7$

[2]

(1) さいころを3回投げるとき，目の出方は 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい．出た目を順に x_1, x_2, x_3 とする．

$$x_1+x_2+x_3=9,\ x_1 \geqq 1,\ x_2 \geqq 1,\ x_3 \geqq 1$$

である (x_1, x_2, x_3) の組の数は $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc||$ の並べ方の総数に等しく ${}_8C_2=28$ 通りある．このうち，

$$(x_1, x_2, x_3)=(7,1,1),\ (1,7,1),\ (1,1,7)$$

の3通りを除くことで，和が9となる目の出方は25通りある．

よって，和が9となる確率は $\dfrac{25}{6^3}=\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{216}}$ …(15)～(19)(答)

合計が12以上となるのは，$x_1+x_2 \geqq 6$ のときであり，上と同様に考えて

$x_1+x_2=6$ のとき $x_3=6$ から $5\times1=5$ 通り

$x_1+x_2=7$ のとき $x_3 \geqq 5$ から $6\times2=12$ 通り

$x_1+x_2=8$ のとき $x_3 \geqq 4$ から $5\times3=15$ 通り

$x_1+x_2=9$ のとき $x_3 \geqq 3$ から $4\times4=16$ 通り

$x_1+x_2=10$ のとき $x_3 \geqq 2$ から $3\times5=15$ 通り

$x_1+x_2=11$ のとき $x_3 \geqq 1$ から $2\times6=12$ 通り

$x_1+x_2=12$ のとき $x_3 \geqq 1$ から $1\times6=6$ 通り

よって，計 $5+12+15+16+15+12+6=81$ 通りあるので，合計が12以上である確率は $\dfrac{81}{6^3}=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$ …(20)(21)(答)

[2] (つづき1)

(2) 目の和がちょうど6となるのは、最大でも6回までである。出た目を順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする。(1)と同様に考えて

$x_1=6$ のとき 1通り

$x_1+x_2=6$ のとき ${}_5C_1$ 通り

$x_1+x_2+x_3=6$ のとき ${}_5C_2$ 通り

$x_1+x_2+x_3+x_4=6$ のとき ${}_5C_3$ 通り

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6$ のとき ${}_5C_4$ 通り

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=6$ のとき 1通り

なので、求める確率は

$$1\cdot\frac{1}{6}+{}_5C_1\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^4+{}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^5+1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$=\left\{{}_5C_0+{}_5C_1\frac{1}{6}+{}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4+{}_5C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\right\}\frac{1}{6}$$

$$=\left(1+\frac{1}{6}\right)^5\times\frac{1}{6}=\left(\frac{7}{6}\right)^5\frac{1}{6}=\frac{7^5}{6^6}$$

よって、$a=\boxed{7}$, $b=\boxed{5}$, $c=\boxed{6}$, $d=\boxed{6}$ …(22)〜(25)(答)

(3) 目の和が5以下のとき、次にどの目が出ても和は12以上とならない。よって、出た目の合計が初めて7以上になった時点でその値が12以上となるのは、直前の目の和が6で、次に6の目が出るときである。よって確率は $\dfrac{7^5}{6^6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{7^5}{6^7}$

よって、$e=\boxed{5}$, $f=\boxed{7}$ …(26)(27)(答)

さらに、出た目の合計が初めて7以上で、その値が9となるのは次の場合がある。出る目は順に x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とする。

[2]（つづき2）

(ア) 直前までの和が3で次に6の目が出るとき，

$x_1=3$，$x_1+x_2=3$，$x_1+x_2+x_3=3$ となる場合を考えて，(2)と同様に

$$\left\{1\cdot\frac{1}{6}+{}_2C_1\left(\frac{1}{6}\right)^2+1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\right\}\times\frac{1}{6}=\left(1+\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{7^2}{6^4}$$

(イ) 直前までの和が4で次に5の目が出るとき，

$x_1=4$，$x_1+x_2=4$，$x_1+x_2+x_3=4$，$x_1+x_2+x_3+x_4=4$ を考えて

$$\left\{1\cdot\frac{1}{6}+{}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^3+1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\right\}\times\frac{1}{6}=\left(1+\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{7^3}{6^5}$$

(ウ) 直前までの和が5で次に4の目が出るとき

$x_1=5$，$x_1+x_2=5$，$x_1+x_2+x_3=5$，$x_1+x_2+x_3+x_4=5$，$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$ を考え

$$\left\{1\cdot\frac{1}{6}+{}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^4+1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\right\}\times\frac{1}{6}=\left(1+\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{7^4}{6^6}$$

(エ) 直前までの和が6で次に3の目が出るとき

(2)から $\dfrac{7^5}{6^6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{7^5}{6^7}$

(ア)(イ)(ウ)(エ)は排反なので，求める確率は，

$$\frac{7^2}{6^4}+\frac{7^3}{6^5}+\frac{7^4}{6^6}+\frac{7^5}{6^7}=\frac{7^2}{6^4}\left\{1+\frac{7}{6}+\left(\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{6}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{7^2}{6^4}\cdot\frac{\left(\frac{7}{6}\right)^4-1}{\frac{7}{6}-1}=\frac{7^2}{6^4}\cdot6\left(\frac{7^4}{6^4}-1\right)=\frac{7^6}{6^7}-\frac{7^2}{6^3}$$

よって，$g=\boxed{6}$，$h=\boxed{7}$，$i=\boxed{2}$，$j=\boxed{3}$　　…(28)〜(31)（答）

[2]（つづき3）【別解】

(1) i 回目に投げたさいころの目の数を x_i $(1 \leqq i \leqq 8)$ で表す．

$x_1+x_2+x_3=9,\ 1 \leqq x_i \leqq 6.$

$x_1=1,\ x_2+x_3=8$	5 通り
$x_1=2,\ x_2+x_3=7$	6 通り
$x_1=3,\ x_2+x_3=6$	5 通り
$x_1=4,\ x_2+x_3=5$	4 通り
$x_1=5,\ x_2+x_3=4$	3 通り
$x_1=6,\ x_2+x_3=3$	2 通り

よって，出た目の合計がちょうど 9 である確率は

$$\frac{5+6+5+4+3+2}{6^3}=\frac{\boxed{2}\boxed{5}}{\boxed{2}\boxed{1}\boxed{6}}.$$ …(15)〜(19)（答）

$x_1+x_2+x_3 \geqq 12,\ 1 \leqq x_i \leqq 6.$

$x_1=1,\ x_2+x_3 \geqq 11$	3 通り
$x_1=2,\ x_2+x_3 \geqq 10$	$3+3=6$ 通り
$x_1=3,\ x_2+x_3 \geqq 9$	$6+4=10$ 通り
$x_1=4,\ x_2+x_3 \geqq 8$	$10+5=15$ 通り
$x_1=5,\ x_2+x_3 \geqq 7$	$15+6=21$ 通り
$x_1=6,\ x_2+x_3 \geqq 6$	$21+5=26$ 通り

よって，出た目の合計が 12 以上である確率は

$$\frac{3+6+10+15+21+26}{6^3}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}.$$ …(20)(21)（答）

(2)

$x_1=6$	$\{6\}$	1 通り
$x_1+x_2=6$	$\{5,\ 1\},\ \{4,\ 2\},\ (3,\ 3)$	$2!+2!+1=5$ 通り
$x_1+x_2+x_3=6$	$\{4,\ 1,\ 1\},\ \{3,\ 2,\ 1\},\ (2,\ 2,\ 2)$	$3+3!+1=10$ 通り
$x_1+x_2+x_3+x_4=6$	$\{3,\ 1,\ 1,\ 1\},\ \{2,\ 2,\ 1,\ 1\}$	$4+\dfrac{4!}{2!2!}=10$ 通り
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6$	$\{2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\}$	5 通り
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=6$	$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$	1 通り

出た目の合計がちょうど 6 になる確率は

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{10}{6^3}+\frac{10}{6^4}+\frac{5}{6^5}+\frac{1}{6^6}=\frac{16807}{6^6}=\frac{7^5}{6^6}$$

だから

$$a=\boxed{7},\ b=\boxed{5},\ c=\boxed{6},\ d=\boxed{6}$$ …(22)〜(25)（答）

[2]（つづき4）

(3)

(1, 1, 1, 1, 1, 1)	$x_7=6$	1 通り
{2, 1, 1, 1, 1}	$x_6=6$	5 通り
{3, 1, 1, 1}, {2, 2, 1, 1}	$x_5=6$	$4+\dfrac{4!}{2!2!}=10$ 通り
{4, 1, 1}, {3, 2, 1}, (2, 2, 2)	$x_4=6$	$3+3!+1=10$ 通り
{5, 1}, {4, 2}, (3, 3)	$x_3=6$	$2!+2!+1=5$ 通り
(6)	$x_2=6$	1 通り

出た目の合計が初めて 7 以上になった時点で，その値が 12 以上である確率は

$$\frac{1}{6^7}+\frac{5}{6^6}+\frac{10}{6^5}+\frac{10}{6^4}+\frac{5}{6^3}+\frac{1}{6^2}=\frac{16807}{6^7}=\frac{7^5}{6^7}$$

だから

$$e=\boxed{5},\ f=\boxed{7}$$ …(26)(27)（答）

出た目の合計が初めて 7 以上になった時点で，その値がちょうど 9 である場合.

最後に 3 が出る場合

(1, 1, 1, 1, 1, 1)	$x_7=3$	1 通り
{2, 1, 1, 1, 1}	$x_6=3$	5 通り
{3, 1, 1, 1}, {2, 2, 1, 1}	$x_5=3$	$4+\dfrac{4!}{2!2!}=10$ 通り
{4, 1, 1}, {3, 2, 1}, (2, 2, 2)	$x_4=3$	$3+3!+1=10$ 通り
{5, 1}, {4, 2}, (3, 3, 3)	$x_3=3$	$2!+2!+1=5$ 通り
(6)	$x_2=3$	1 通り

$$\frac{7^5}{6^7}$$

最後に 4 が出る場合

(1, 1, 1, 1, 1)	$x_6=4$	1 通り
{2, 1, 1, 1}	$x_5=4$	4 通り
{3, 1, 1}, {2, 2, 1}	$x_4=4$	$3+3=6$ 通り
{4, 1}, {3, 2}	$x_3=4$	$2!+2!=4$ 通り
(5)	$x_2=4$	1 通り

$$\frac{1}{6^6}+\frac{4}{6^5}+\frac{6}{6^4}+\frac{4}{6^3}+\frac{1}{6^2}=\frac{2401}{6^6}=\frac{7^4}{6^6}$$

最後に 5 が出る場合

(1, 1, 1, 1)	$x_5=5$	1 通り
{2, 1, 1}	$x_4=5$	3 通り
{3, 1}, (2, 2)	$x_3=5$	$2+1=3$ 通り
(4)	$x_2=5$	1 通り

$$\frac{1}{6^5}+\frac{3}{6^4}+\frac{3}{6^3}+\frac{1}{6^2}=\frac{343}{6^5}=\frac{7^3}{6^5}$$

[2]（つづき5）

最後に 6 が出る場合

(1, 1, 1)	$x_4=6$	1 通り
{2, 1}	$x_3=6$	2 通り
(3)	$x_2=6$	1 通り

$$\frac{1}{6^4}+\frac{2}{6^3}+\frac{1}{6^2}=\frac{49}{6^4}=\frac{7^2}{6^4}$$

出た目の合計が初めて 7 以上になった時点で，その値がちょうど 9 である確率は

$$\begin{aligned}\frac{7^5}{6^7}+\frac{7^4}{6^6}+\frac{7^3}{6^5}+\frac{7^2}{6^4}&=\frac{7^5}{6^7}\left\{1+\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^3\right\}\\&=\frac{7^5}{6^7}\cdot\frac{1-\left(\frac{6}{7}\right)^4}{1-\frac{6}{7}}\\&=\frac{7^6}{6^7}-\frac{7^2}{6^3}\end{aligned}$$

だから

$$g=\boxed{6},\ h=\boxed{7},\ i=\boxed{2},\ j=\boxed{3}.$$ …(28)～(31)（答）

[3]

(1)　$a_1=1,\ b_2=1$ より $\dfrac{a_1}{b_1}=1<2$ だから

$$a_2=a_1+1=2,\ \ b_2=b_1=1.$$

$\dfrac{a_2}{b_2}=2\geqq 2$ より

$$a_3=a_2=\boxed{2},\ \ b_3=b_2+1=\boxed{2}. \qquad \cdots(32)(33)\ (答)$$

$\dfrac{a_3}{b_3}=1<2$ より

$$a_4=a_3+1=3,\ \ b_4=b_3=2.$$

$\dfrac{a_4}{b_4}=\dfrac{3}{2}<2$ より

$$a_5=a_4+1=4,\ \ b_5=b_4=2.$$

$\dfrac{a_5}{b_5}=2\geqq 2$ より

$$a_6=a_5=\boxed{4},\ \ b_6=b_5+1=\boxed{3}. \qquad \cdots(34)(35)\ (答)$$

(2)　(1) より

$$a_{3m}=\boxed{2}\,m+\boxed{0},\ \ b_{3m}=\boxed{1}\,m+\boxed{1} \qquad \cdots②$$

$\cdots(36)\sim(39)$ (答)

が成り立つと推測される．

$m=1$ のとき ② は成り立つ．$m=k$ のとき ② を仮定すると

$\dfrac{a_{3k}}{b_{3k}}=\dfrac{2k}{k+1}=2-\dfrac{2}{k+1}<2$ より

$$a_{3k+1}=a_{3k}+1=\boxed{2}\,k+\boxed{1},\ \ b_{3k+1}=b_{3k}=\boxed{1}\,k+\boxed{1}. \qquad \cdots(40)\sim(43)\ (答)$$

$\dfrac{a_{3k+1}}{b_{3k+1}}=\dfrac{2k+1}{k+1}=2-\dfrac{1}{2k+1}<2$ より

$$a_{3k+2}=a_{3k+1}+1=\boxed{2}\,k+\boxed{2},\ \ b_{3k+2}=b_{3k+1}=\boxed{1}\,k+\boxed{1}. \qquad \cdots(44)\sim(47)\ (答)$$

$\dfrac{a_{3k+2}}{b_{3k+2}}=2\geqq 2$ より

$$a_{3k+3}=a_{3k+2}=\boxed{2}\,k+\boxed{2},\ \ b_{3k+3}=b_{3k+2}+1=\boxed{1}\,k+\boxed{2}. \qquad \cdots(48)\sim(51)\ (答)$$

よって，$m=k+1$ のときにも ② は成り立つ．

(3)　$a_1=b_1=1$ だから，すべての自然数 k に対して

$$\begin{cases} a_{3k-2}=2k-1 \\ a_{3k-1}=2k \\ a_{3k}\quad =2k \end{cases}$$

が成り立つから

[3] (つづき)

$$
\begin{aligned}
S_{3m} &= \sum_{k=1}^{m}(10^{a_{3k-2}}+10^{a_{3k-1}}+10^{a_{3k}})\\
&= \sum_{k=1}^{m}(10^{2k-1}+10^{2k}+10^{2k})\\
&= \left(\frac{1}{10}+1+1\right)\sum_{k=1}^{m}100^{k}\\
&= \frac{21}{10}\cdot 100\cdot\frac{100^{m}-1}{100-1}\\
&= \frac{\boxed{7}\boxed{0}}{\boxed{3}\boxed{3}}(10^{2m}-1)
\end{aligned}
$$

$\cdots$ (53)〜(56) (答)

であり，$s=\boxed{2}$ である．　$\cdots$ (52) (答)

また，$m \geqq 1$ のとき $\frac{70}{33}10^{2m}-\frac{70}{33}$ の桁数は $\frac{70}{33}10^{2m}$ の桁数と一致する．

$$10^{2m} \leqq \frac{70}{33}10^{2m} < 10^{2m+1}$$

より $\frac{70}{33}10^{2m}$ は $2m+1$ 桁だから，S_{3m} は

$\boxed{2}\,m+\boxed{1}$ 桁の整数である．　$\cdots$ (57)(58) (答)

[4] (1) Pは直線AC上にあるので s を実数として，

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AC}$

$= (0, 0, 1) + s(p, q, r-1)$

と表わせる。Pは xy 平面上にあるから

(z成分$=$) $1 + (r-1)s = 0$

$-1 < r < 1$ より $r-1 \neq 0$ なので $s = \dfrac{1}{1-r}$

よって，Pの座標は $P\left(\dfrac{p}{1-r}, \dfrac{q}{1-r}, 0\right)$ …(答)

また，Qは直線BC上にあるので t を実数として

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC}$

$= (0, 0, -1) + t(p, q, r+1)$

と表わせる。Qは xy 平面上にあるから

(z成分$=$) $-1 + (r+1)t = 0$

$-1 < r < 1$ より $r+1 \neq 0$ なので $t = \dfrac{1}{1+r}$

よってQの座標は $Q\left(\dfrac{p}{1+r}, \dfrac{q}{1+r}, 0\right)$ …(答)

(2) 線分RSの方程式は

$2x + 4y = 1,\ z = 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$

であるのでPが線分RS上を動くとき，

$\dfrac{2p}{1-r} + \dfrac{4q}{1-r} = 1$ …①

$\dfrac{p}{1-r} \geqq 0$ …②

$\dfrac{q}{1-r} \geqq 0$ …③

[4]（つづき1）

Cは球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上より

$p^2+q^2+r^2=1$ …④

ここで、Q(X, Y, 0) とおくと (1) より

$X=\frac{p}{1+r}$ …⑤

$Y=\frac{q}{1+r}$ …⑥

$-1<r<1$ より $1-r>0$, $1+r>0$ であるので②, ③より $X\geqq 0$, $Y\geqq 0$

⑤⑥より $p=(1+r)X$, $q=(1+r)Y$ なので①は

$$\frac{2(1+r)X}{1-r}+\frac{4(1+r)Y}{1-r}=1$$

これより $r=\frac{1-2X-4Y}{1+2X+4Y}$ をえるので ⑤, ⑥より

$$p=\frac{2X}{1+2X+4Y},\quad q=\frac{2Y}{1+2X+4Y}$$

よって ④より

$$\left(\frac{2X}{1+2X+4Y}\right)^2+\left(\frac{2Y}{1+2X+4Y}\right)^2+\left(\frac{1-2X-4Y}{1+2X+4Y}\right)^2=1$$

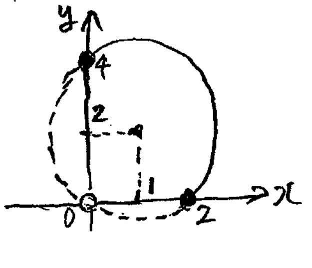
$$4X^2+4Y^2+(1-2X-4Y)^2=(1+2X+4Y)^2$$

$$(X-1)^2+(Y-2)^2=5$$

また、$r\neq\pm1$ より $p^2+q^2=1-r^2\neq0$ なので $(p, q)\neq(0, 0)$

よって ⑤⑥より $(X, Y)\neq(0, 0)$

以上より、点Qの軌跡は次図の実線部分

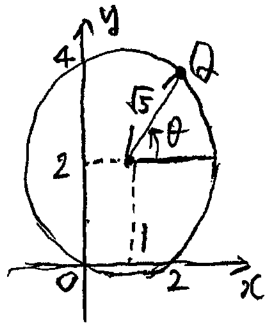


[4] (つづき2)

(3) Cからx軸におろした垂線の足をHとすると

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{1-r^2}$$

であるので△ABCの面積が最小となるのは$|r|$が最大のとき。



左の図のようにθをとると

$X = 1+\sqrt{5}\cos\theta,\ Y = 2+\sqrt{5}\sin\theta$

と表わすことができ、θがとりうる値の範囲は

αを$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$をみたす第1象限の角として、$-\alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha$である。

このとき

$$r = \frac{1-2X-4Y}{1+2X+4Y}$$

$$= \frac{2}{1+2X+4Y} - 1$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{5}(2\sin\theta+\cos\theta)+11} - 1$$

$$= \frac{2}{10\sin(\theta+\frac{\pi}{2}-\alpha)+11} - 1$$

$-\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha$ より $\frac{\pi}{2}-2\alpha \leqq \theta+\frac{\pi}{2}-\alpha \leqq \frac{3}{2}\pi-2\alpha$ なので

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \leqq 1$$

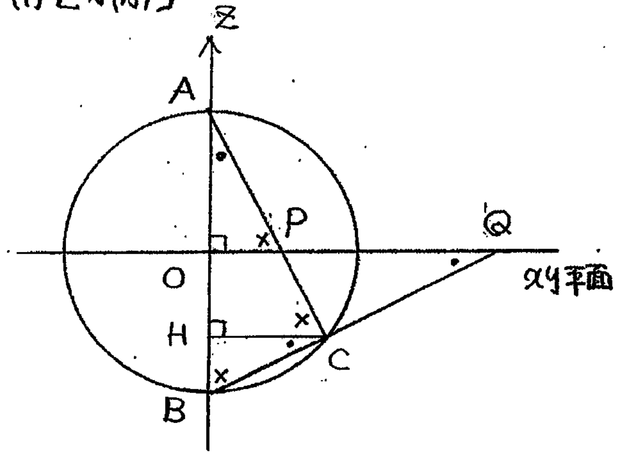
$$-\frac{3}{5} \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \leqq 1$$

よって $-\frac{19}{21} \leqq r \leqq -\frac{3}{5}$

以上より△ABCの面積の最小値は $\sqrt{1-\left(\frac{19}{21}\right)^2} = \frac{4}{21}\sqrt{5}$ …(答)

[4]（つづき3）

(1)［別解］



Cからz軸へ下ろした垂線の足を
H$(0, 0, \gamma)$とする.
3点A, B, Cを含む平面内にP, Qは存在し, 左図のようになる.
また, CはA, Bと異なるので,
$-1 < \gamma < 1$　である.

AC : AP = AH : AO より AC : AP = $1-\gamma : 1$ なので. $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{1-\gamma}\overrightarrow{AC}$.

よって, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{1-\gamma}\overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) + \dfrac{1}{1-\gamma}(p, q, \gamma-1) = \left(\dfrac{p}{1-\gamma}, \dfrac{q}{1-\gamma}, 0\right)$から

$$P\left(\frac{p}{1-\gamma}, \frac{q}{1-\gamma}, 0\right) \quad \cdots（答）$$

BC : BQ = BH : BO より BC : BQ = $1+\gamma : 1$ なので, $\overrightarrow{BQ} = \dfrac{1}{1+\gamma}\overrightarrow{BC}$

よって, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \dfrac{1}{1+\gamma}\overrightarrow{BC} = (0, 0, -1) + \dfrac{1}{1+\gamma}(p, q, \gamma+1) = \left(\dfrac{p}{1+\gamma}, \dfrac{q}{1+\gamma}, 0\right)$から

$$Q\left(\frac{p}{1+\gamma}, \frac{q}{1+\gamma}, 0\right) \quad \cdots（答）$$

(2)［別解］

P$(x, y, 0)$, Q$(X, Y, 0)$とおく.

直線RSの方程式は, $2x+4y=1$, $z=0$ なので, Pが線分RS上を動くとき, x, yは $2x+4y=1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ …① を満たす.

一方, (1)の図のように O, P, Q は同一直線上にあり,

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OQ} \quad (k > 0)$$

と表せる. また, $\triangle OAP \backsim \triangle OQB$ から OA : OP = OQ : OB で

$$OP \cdot OQ = OA \cdot OB = 1 \quad (OA = OB = 1 より)$$

[4]（つづき4）

$|\overrightarrow{OP}| = k|\overrightarrow{OQ}|$ と $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| = 1$ から，$k|\overrightarrow{OQ}|^2 = 1$．つまり $k = \dfrac{1}{|\overrightarrow{OQ}|^2}$ となり

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{|\overrightarrow{OQ}|^2}\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{X}{X^2+Y^2},\ \frac{Y}{X^2+Y^2},\ 0\right) \qquad (X^2+Y^2 \neq 0)$$

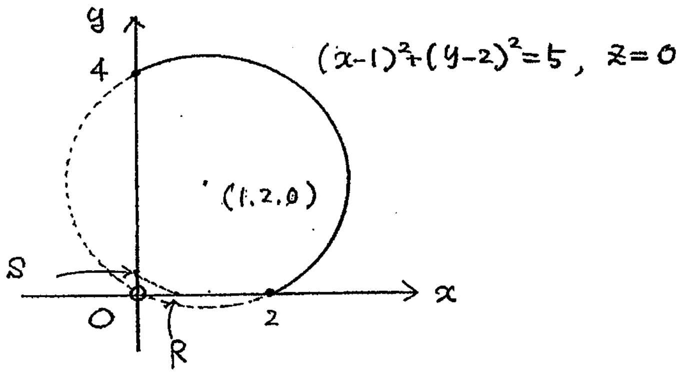
$x = \dfrac{X}{X^2+Y^2}$，$y = \dfrac{Y}{X^2+Y^2}$ となるので，①から $2\dfrac{X}{X^2+Y^2} + 4\cdot\dfrac{Y}{X^2+Y^2} = 1$．

整理して，$(X-1)^2+(Y-2)^2 = 5$　ただし $(X, Y) \neq (0, 0)$

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より $X \geqq 0$，$Y \geqq 0$ であり，$k > 0$ に注意すると，

Qの軌跡は「$(x-1)^2+(y-2)^2=5$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z=0$，Oを除く」

で表される円弧．



…（答）

(3) [別解]

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}AB\cdot CH = CH$　なので，$\triangle ABC$ の面積が最小となるのは

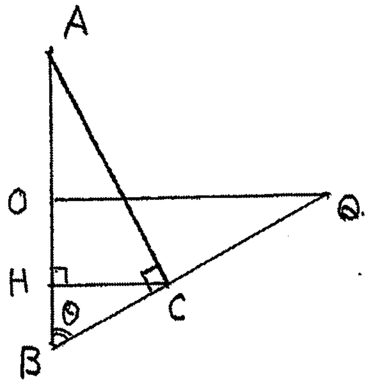
CHが最小となるときである．

Pが線分RS上を動くとき，Pは球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の内部の点なので，(1)の図のようにCのz座標は負である．

(1)の図から「CHが最小 $\Leftrightarrow$ OPが最小」，(2)の $OP\cdot OQ = 1$ を用いると，

「CHが最小 $\Leftrightarrow$ OQが最大」である．D$(1, 2, 0)$ とすると，OQが最大となるのはQが直線OD上にあるときで，その最大値は(2)の円の直径に等しく $2\sqrt{5}$．

[4]（つづき5）



$\triangle OBQ$ において，$\angle OBQ=\theta$ とおくと，

$OB=1$，$OQ=2\sqrt{5}$ から $\tan\theta=2\sqrt{5}$．

よって，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{21}}$

$\triangle ABC$ において，

$BC=AB\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$ なので，

$\triangle BCH$ で $CH=BC\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{21}}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{21}$．

したがって，$\triangle ABC$ の面積の最小値は $\dfrac{4\sqrt{5}}{21}$ …（答）

[5]

$$\log_8(2-\alpha)+\log_{64}(\alpha+1)=\log_4\alpha. \qquad \cdots ①$$

真数は正であるから,

$$2-\alpha>0,\ かつ\ \alpha+1>0,\ かつ\ \alpha>0$$

より, α のとり得る値の範囲は,

$$0<\alpha<2. \qquad \cdots ②$$

(1) ①の底を2にそろえて,

$$\frac{1}{3}\log_2(2-\alpha)+\frac{1}{6}\log_2(\alpha+1)=\frac{1}{2}\log_2\alpha.$$

$$2\log_2(2-\alpha)+\log_2(\alpha+1)=3\log_2\alpha.$$

$$\log_2(2-\alpha)^2(\alpha+1)=\log_2\alpha^3.$$

$$(2-\alpha)^2(\alpha+1)=\alpha^3.$$

整理して,

$$3\alpha^2-4=0.$$

②より,

$$\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(答)$$

(2) (1) より, $\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

点 $(\sqrt{3}\alpha,\alpha^2)$ に関して, 曲線 $y=\log_2 x$ 上の点 (x,y) と対称な点を $(s,\ t)$ とすると,

$$\begin{cases} \dfrac{x+s}{2}=\sqrt{3}\alpha=2, \\ \dfrac{y+t}{2}=\alpha^2=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

が成り立つ.

よって,

$$(x,y)=\left(4-s,\frac{8}{3}-t\right).$$

$y=\log_2 x$ に代入して,

$$\frac{8}{3}-t=\log_2(4-s)\ より,\ t=\frac{8}{3}-\log_2(4-s). \qquad \cdots(答)$$

(3) $t\geqq 0$ であるから, (2) より,

$$\frac{8}{3}-\log_2(4-s)\geqq 0.$$

$\dfrac{8}{3}=\log_2 4^{\frac{4}{3}}$ より,

$$(\sqrt[3]{4})^4\geqq 4-s.$$

よって, s のとり得る値の範囲は,

$$4-(\sqrt[3]{4})^4\leqq s\leqq 0.$$

[5](つづき)

ここで,$u=s+t$ とおくと,(2) より,

$$u=\frac{8}{3}+s-\log_2(4-s).$$

$\log_2(4-s)$ は s の減少関数であるから,u は s の増加関数である. 上式の u を $u(s)$ とすると,

$$u(4-(\sqrt[3]{4})^4)\leqq u\leqq u(0).$$

$$4-(\sqrt[3]{4})^4\leqq u\leqq \frac{2}{3}.$$

よって,

$$\frac{4-(\sqrt[3]{4})^4}{2}\pi\leqq \frac{u}{2}\pi\leqq \frac{\pi}{3}. \qquad \cdots③$$

いま,

$$3\sin\left(\frac{u}{2}\pi\right)+\cos\left(\frac{u}{2}\pi\right)=\sqrt{10}\sin\left(\frac{u}{2}\pi+\beta\right)$$

と合成できる. ただし,β は $(\cos\beta,\sin\beta)=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ を満たす角とする.

③より,

$$\frac{4-(\sqrt[3]{4})^4}{2}\pi+\beta\leqq \frac{u}{2}\pi+\beta\leqq \frac{\pi}{3}+\beta.$$

ここで,$0<\beta<\frac{\pi}{6}$ であり,$1.5<\sqrt[3]{4}<1.6$ より,$-\frac{5}{6}\pi>\frac{4-(\sqrt[3]{4})^4}{2}\pi>-\pi$ なので,

$$\frac{4-(\sqrt[3]{4})^4}{2}\pi+\beta<-\frac{\pi}{2},\ 0<\frac{u}{2}\pi+\beta<\frac{\pi}{2}$$

となる.

このとき,

$$\text{最大値}:3\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}+1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\text{最小値}:\sqrt{10}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{10}. \qquad \cdots(\text{答})$$

[6]

(1)　3次関数 $f(x)$ が $f(a)=0$，$f'(a)=0$ を満たすことから，

$$f(x)=(x-a)^2(px+q)\ \text{（ただし，}p,\ q\text{ は実数で }p\neq 0\text{）}$$

とおける．（参照あり）

$f(0)=-a^2$ より，

$$a^2q=-a^2$$

$a>0$ より，

$$q=-1$$

このとき，

$$f(x)=(x-a)^2(px-1)$$

であり，

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx&=\int_0^a (x-a)^2(px-1)dx\\&=\int_0^a (x-a)^2\{p(x-a)+ap-1\}dx\\&=\int_0^a \{p(x-a)^3+(ap-1)(x-a)^2\}dx\\&=\left[\frac{p}{4}(x-a)^4+\frac{ap-1}{3}(x-a)^3\right]_0^a\\&=-\frac{p}{4}a^4+\frac{ap-1}{3}a^3\end{aligned}$$

$\int_0^a f(x)dx=0$ より，

$$-\frac{p}{4}a^4+\frac{ap-1}{3}a^3=0$$

$a>0$ より，

$$-3pa+4ap-4=0$$

$$p=\frac{4}{a}$$

よって，$f(x)=(x-a)^2\left(\frac{4}{a}x-1\right)$

$$=\frac{4}{a}(x-a)^2\left(x-\frac{a}{4}\right)$$　…（答）

[6]（つづき１）

(2)　$f(x)=\dfrac{4}{a}(x-a)^2\left\{(x-a)+\dfrac{3}{4}a\right\}$

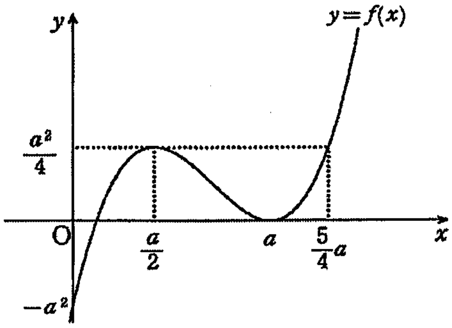
$=\dfrac{4}{a}\left\{(x-a)^3+\dfrac{3}{4}a(x-a)^2\right\}$

$f'(x)=\dfrac{4}{a}\left\{3(x-a)^2+\dfrac{3}{2}a(x-a)\right\}$

$=\dfrac{12}{a}(x-a)\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$

$f(x)$ の増減は以下のようになり，
$y=f(x)$ のグラフは右図．

x	$\cdots$	$\dfrac{a}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{a^2}{4}$	↘	0	↗



（ｉ）　$1\leqq\dfrac{a}{2}$ または $\dfrac{5}{4}a\leqq 1$ つまり，$0<a\leqq\dfrac{4}{5}$ または $2\leqq a$ のとき

最大値 $f(1)=\dfrac{4}{a}(1-a)^2\left(1-\dfrac{a}{4}\right)$

（ⅱ）　$\dfrac{a}{2}<1<\dfrac{5}{4}a$ つまり，$\dfrac{4}{5}<a<2$ のとき

最大値 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}$

以上より，求める最大値は，$\begin{cases}\dfrac{4}{a}(1-a)^2\left(1-\dfrac{a}{4}\right) & \left(0<a\leqq\dfrac{4}{5}\text{ または }2\leqq a\text{ のとき}\right)\\ \dfrac{a^2}{4} & \left(\dfrac{4}{5}<a<2\text{ のとき}\right)\end{cases}$　…（答）

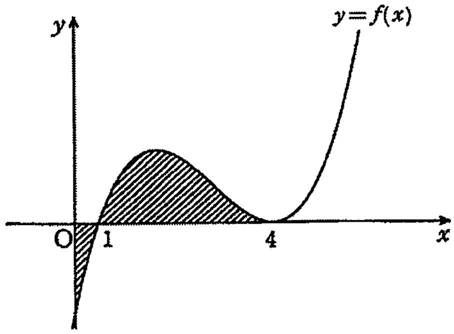
(3)　$a=4$ のとき，

$f(x)=(x-4)^2(x-1)$

$=(x-4)^2\{(x-4)+3\}$

$=(x-4)^3+3(x-4)^2$

求める面積を S とすると，S は右図の斜線部分であり，



$S=-\displaystyle\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx$

$=-\left[\dfrac{1}{4}(x-4)^4+(x-4)^3\right]_0^1+\left[\dfrac{1}{4}(x-4)^4+(x-4)^3\right]_1^4$

$=-\left(\dfrac{81}{4}-27\right)\cdot 2=\dfrac{27}{2}$　…（答）

[6]（つづき２）

(1)（参照）

$f(a)=0$，$f'(a)=0$ から $f(x)=(x-a)^2(px+q)$ とすることを用いなければ以下のような解答になる．

$f(0)=-a^2$ から $f(x)=px^3+qx^2+rx-a^2$ とおく．ただし，p, q, r は実数で $p\neq0$ とする．すると，$f'(x)=3px^2+2qx+r$．

$f(a)=0$ より　$pa^3+qa^2+ra-a^2=0$　…①

$f'(a)=0$ より　$3pa^2+2qa+r=0$　…②

$\int_0^a f(x)\,dx=\left[\frac{p}{4}x^4+\frac{q}{3}x^3+\frac{r}{2}x^2-a^2x\right]_0^a=\frac{p}{4}a^4+\frac{q}{3}a^3+\frac{r}{2}a^2-a^3$ なので，

$\int_0^a f(x)\,dx=0$ より　$\frac{p}{4}a^4+\frac{q}{3}a^3+\frac{r}{2}a^2-a^3=0$　…③

②$\times a-$① より　$2pa^3+qa^2+a^2=0$，$a^2\neq0$ より

$2pa+q+1=0$　…④

①$\times\frac{a}{2}-$③ より　$\frac{p}{4}a^4+\frac{q}{6}a^3+\frac{a^3}{2}=0$，$a^3\neq0$ より

$3pa+2q+6=0$　…⑤

④，⑤ より　$p=\frac{4}{a}$，$q=-9$，② から $r=6a$ を得るので，

$f(x)=\frac{4}{a}x^3-9x^2+6ax-a^2=\frac{4}{a}(x-a)^2\left(x-\frac{a}{4}\right)$　…（答）