1.

$f(x)=x^2-3x+1$, $g(x)=-x^2-3x+1$ とおくと

$$C:\begin{cases} y=f(x) & (x \geqq 0),\\ y=g(x) & (x \leqq 0).\end{cases}$$

$f'(x)=2x-3=1$ を満たす $x$ は, $x=2\ (>0)$ であり, $f(2)=-1$ より, 点 $(2, f(2))$ における $C$ の接線の方程式は,

$$y=x-3.$$

$g'(x)=-2x-3=1$ を満たす $x$ は, $x=-2\ (<0)$ であり, $g(-2)=3$ より, 点 $(-2, g(-2))$ における $C$ の接線の方程式は,

$$y=x+5.$$

$a<0$ より,

$$a=-3. \quad \cdots(答)$$

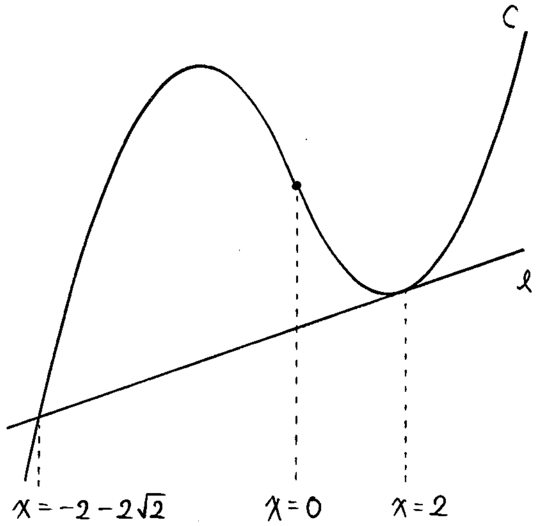
$y=g(x)$ のグラフと $\ell$ の共有点の $x$ 座標は,

$$g(x)-(x-3)=-x^2-4x+4=0$$

より

$$x=-2\pm 2\sqrt{2}.$$

$-2+2\sqrt{2}>0$ をふまえると, $C, \ell$ は次の図のようになる.




よって, 求める面積を $S$ とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2-2\sqrt{2}}^{0} \{g(x)-(x-3)\}\,dx + \int_0^2 \{f(x)-(x-3)\}\,dx \\ &= \int_{-2-2\sqrt{2}}^{0} (-x^2-4x+4)\,dx + \int_0^2 (x^2-4x+4)\,dx \\ &= \int_{-2-2\sqrt{2}}^{0} \{8-(x+2)^2\}\,dx + \int_0^2 (x-2)^2\,dx \\ &= \left[8x-\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2-2\sqrt{2}}^{0} + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2 \\ &= 8(2+2\sqrt{2})-\frac{1}{3}\{2^3-(-2\sqrt{2})^3\} + \frac{1}{3}\{0-(-2)^3\} \\ &= 16+16\sqrt{2}-\frac{8}{3}-\frac{16}{3}\sqrt{2}+\frac{8}{3} \\ &= 16+\frac{32}{3}\sqrt{2}. \quad \cdots(答) \end{aligned}$$

**2**

求める $x$ の2次関数を

$y=ax^2+bx+c$ とおく．

ただし，$a \neq 0$ …①

2つのグラフ

$y=ax^2+bx+c$ と $y=x^2$

は2点で交わるので，

$ax^2+bx+c=x^2$

すなわち，

「$(a-1)x^2+bx+c=0$ …㋐

は異なる2実解 $\alpha, \beta$

をもつ」…(*)

よって，$a \neq 1$ …②

であり，

（㋐の判別式）

$= b^2-4(a-1)c>0$ …③

また，2つのグラフ

$y=ax^2+bx+c$ と $y=x^2$

のグラフの共有点のいずれ

においても接線どうしが

直交するので，

$(2ax+b)\cdot 2x=-1$

すなわち

「$4ax^2+2bx+1=0$

は異なる2実解 $\alpha, \beta$

をもつ」…(**)

(*)，(**)より

$(a-1)x^2+bx+c=(a-1)(x-\alpha)(x-\beta)$

$4ax^2+2bx+1=4a(x-\alpha)(x-\beta)$

と表されるので，

$$x^2+\frac{b}{a-1}x+\frac{c}{a-1}=x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{1}{4a}$$

は $x$ の恒等式である．

よって，$a, b, c$ の条件は，

①，②，③ と

$\dfrac{b}{a-1}=\dfrac{b}{2a}$ …④，$\dfrac{c}{a-1}=\dfrac{1}{4a}$ …⑤

をすべて満たすことである．

④より，$2ab=(a-1)b$

$b(a+1)=0$

$b=0$，または $a=-1$

(i) $b=0$ のとき

⑤より $4ac=a-1$

①より $c=\dfrac{a-1}{4a}$

このとき，③より，

$$\frac{(a-1)^2}{a}<0$$

②より，$(a-1)^2>0$ であるから

$a<0$

(ii) $a=-1$ のとき（①，②を満たす）

⑤より，$c=\dfrac{1}{2}$

このとき，③より

$b^2+4>0$ （任意の実数 $b$ で成り立つ）

以上より，求める2次関数は

$$\begin{cases} y=ax^2+\dfrac{a-1}{4a} \\ y=-x^2+bx+\dfrac{1}{2} \end{cases} \cdots\text{(答)}$$

（$a$ は任意の負の実数，$b$ は任意の実数）

3

$f(m,n)=(m+1)n^2+am^2+8$.

$m$が奇数のとき，

$(m+1)n^2$が偶数，$am^2$が奇数

であるから，$f(m,n)$は奇数であり，

16で割り切れることはない．

よって，$m$は偶数であり，このとき

$m+1$が奇数，$am^2$が偶数

であるから，$f(m,n)$が16で割り切れるためには，$n$が偶数であることが必要である．

以下，$(m,n)=(2k,2l)$とする

（$k,l$は整数）

$$f(m,n)=(2k+1)(2l)^2+a(2k)^2+8$$
$$=4\{(2k+1)l^2+ak^2+2\}$$

であり，これが16で割り切れるのは，

$(2k+1)l^2+ak^2+2$が4で割り切れる　…①

ときである．

一般に，$N$を整数として，

$(2N)^2=4N^2$，$(2N+1)^2=4(N^2+N)+1$

より，偶数，奇数のそれぞれを2乗した数を4で割った余りは，0，1である．　…(＊)

(ア)　$l$が偶数のとき

(＊)より，$(2k+1)l^2$が4で割り切れるので，①が成り立つのは$ak^2+2$が4で割り切れるときである．

◦ $k$が偶数であれば，(＊)より

$ak^2+2$を4で割った余りは2，

◦ $k$が奇数であれば，$ak^2$は奇数なので

$ak^2+2$は4で割り切れない

(イ)　$l$が奇数のとき

$(2k+1)l^2$が奇数なので，①が成り立つために$ak^2$が奇数であることが必要．

$k=2k'+1$とし，(＊)より$l^2=4l'+1$とする．

（$k',l'$は整数）

$$(2k+1)l^2+ak^2+2$$
$$=(4k'+3)(4l'+1)+a(2k'+1)^2+2$$
$$=4(4k'l'+k'+3l'+ak'^2+ak'+1)+a+1$$

より，①が成り立つのは，奇数$a$を4で割った余りが3のときである．

このとき，

$(m,n)=(2(2k'+1),2l)$

（$k'$は整数，$l$は奇数）

とすれば，$f(m,n)$は16で割り切れる．

求める奇数$a$の条件は，

4で割った余りが3であること．

…(答)

4

与えられた条件から

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}$$

なので,

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{1}{2}$$

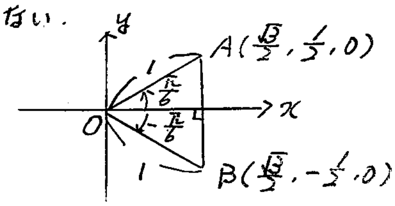
となり,

$$\angle AOB=\frac{\pi}{3}.$$

よって, 座標軸をとりなおして, Oは原点のままで

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right),\quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

とし, Cは $z\geqq 0$ の範囲にあるとしてさしつかえない.




$C(p, q, r)$ $(r\geqq 0)$ とすると

$$|\overrightarrow{OC}|=1,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

より

$$\begin{cases} p^2+q^2+r^2=1. & \cdots ① \\ \frac{\sqrt{3}}{2}p+\frac{1}{2}q=-\frac{\sqrt{6}}{4}. & \cdots ② \\ \frac{\sqrt{3}}{2}p-\frac{1}{2}q=-\frac{\sqrt{6}}{4}. & \cdots ③ \end{cases}$$

②, ③より

$$p=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad q=0$$

であり, これらを①に代入して

$$\frac{1}{2}+r^2=1 \quad \text{すなわち} \quad r^2=\frac{1}{2}.$$

ここで, $r\geqq 0$ なので

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって,

$$C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

さらに, $D(x, y, z)$ とすると,

$$|\overrightarrow{OD}|=1,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=k,$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}$$

より,

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1. & \cdots ④ \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=k. & \cdots ⑤ \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=k. & \cdots ⑥ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}z=\frac{1}{2}. & \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑤, ⑥より

「$x=\frac{2}{\sqrt{3}}k,\ y=0.$」$\cdots ⑧$

$x=\frac{2}{\sqrt{3}}k$ を⑦に代入して

$$z=\frac{2}{\sqrt{3}}k+\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \cdots ⑨$$

⑧, ⑨を④に代入して

$$\frac{4}{3}k^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}k+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

整理して

$$8k^2+2\sqrt{6}k-\frac{3}{2}=0.$$

これと $k>0$ とから

$$k=\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{8}. \quad \cdots (答)$$

5

「どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない$\cdots$(*)」
という条件を満たす数字の入れ方があったとき，その行や列を入れ替えてできる数字の入れ方もまた (*) を満たすものとなる．(下の例は 1 行目と 3 行目を入れ替えたもの)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |

条件を満たす数字の入れ方に対して、行の並び替えをすることで 1 列目に数字が上から 1, 2, 3, 4 の順に並ぶようにでき，さらに 2 列目から 4 列目の並び替えをすることで，1 行目に数字が左から 1, 2, 3, 4 の順に並ぶようにできる．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

したがって，以下の形での残り $3\times3$ マスの数字の入れ方を考える．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

2 行 2 列目に入る数字で場合分けをする．

(i) 1 が入るとき，残りの数字の入れ方は下図の 2 通りである．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | | |
| 4 | 3 | | |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |

(ii) 3 が入るとき，残りの数字の入れ方は下図の 1 通りである．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | 3 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | |
| 3 | 4 | | |
| 4 | | | 3 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |

(iii) 4 が入るとき，残りの数字の入れ方は下図の 1 通りである．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | | |
| 3 | | 4 | |
| 4 | | | |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | | 3 |
| 3 | | 4 | |
| 4 | 3 | | |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

(i)〜(iii) より，残り $3\times3$ マスの数字の入れ方は 4 通りである．

そのそれぞれに対して、行の並び替えの方法が $4!$ 通りずつ，列の並び替えの方法が $3!$ 通りずつあるので，条件 (*) を満たす数字の入れ方は，

$$4\times4!\times3!=576\ (\text{通り})\qquad\cdots(\text{答})$$

ある．