1

実数係数の（その）3次方程式(*)の3解は複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となるので，その3解は，

$$t,\ \beta,\ \overline{\beta}\quad (t:\text{実数},\ \beta:\text{虚数})$$

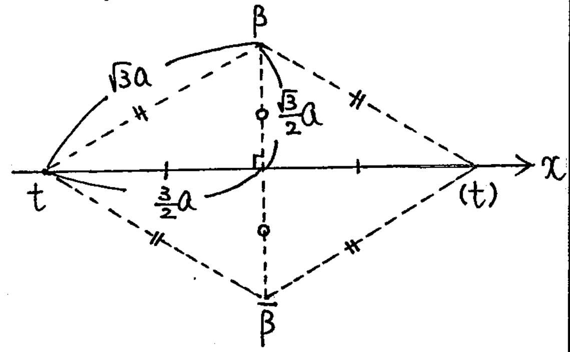
とおける．ただし，

$$\beta = t - \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

または

$$\beta = t + \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

である．



また，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} t+\beta+\overline{\beta} = -3a & \cdots ① \\ t\beta+\beta\overline{\beta}+\overline{\beta}t = b & \cdots ② \\ t\beta\overline{\beta} = -1 & \cdots ③ \end{cases}$$

(i) $\beta = t - \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}ai$ のとき

①より，

$$t + 2\left(t - \frac{3}{2}a\right) = -3a$$
$$3t - 3a = -3a$$
$$t = 0$$

これは，③に反し，不適．

(ii) $\beta = t + \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}ai$ のとき

①より，

$$t + 2\left(t + \frac{3}{2}a\right) = -3a$$
$$3t + 3a = -3a$$
$$t = -2a$$

これより，

$$\beta = -\frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i)$$

③より，

$$-2a \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 4 = -1$$
$$a^3 = \frac{1}{2}$$

$a>0$ より，

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad t = -\sqrt[3]{4}$$

$$\beta = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1 - \sqrt{3}i)$$

②より，

$$t(\beta+\overline{\beta}) + \beta\overline{\beta} = b$$
$$-2a\cdot(-a) + \frac{a^2}{4}\cdot 4 = b$$
$$b = 3a^2$$
$$= \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

以上より，求める a, b は

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad b = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\quad \cdots(\text{答})$$

求める(*)の3つの解は，

$$-\sqrt[3]{4},\ -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1 \pm \sqrt{3}i)\quad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$

(1) $a_m = \alpha^m + \beta^m$ $(m=1,2,3\cdots)$ とおく

$$\alpha^{m+2}+\beta^{m+2} = (\alpha+\beta)(\alpha^{m+1}+\beta^{m+1}) - \alpha\beta(\alpha^m+\beta^m)$$

α, β は $x^2-2px-1=0$ の2解なので

$\alpha+\beta=2p$，$\alpha\beta=-1$ より

$$\begin{cases} a_{m+2} = 2pa_{m+1} + a_m \cdots ① \quad (m=1,2,3\cdots) \\ a_1 = \alpha+\beta = 2p \\ a_2 = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 4p^2+2 \end{cases}$$

「すべての正の整数 m に対して a_m は整数であり，偶数であること」…(*)

を数学的帰納法により証明する

[I] $m=1$ のとき $a_1=2p$ より成立

$m=2$ のとき $a_2=4p^2+2$ より成立

（p：整数より）

[II] $m=k, k+1$ のとき

a_k, a_{k+1} は整数であり偶数であると仮定．

$m=k+2$ のとき　① より

$a_{k+2} = 2pa_{k+1} + a_k$

仮定から a_{k+1}, a_k は整数であり，偶数であるから，a_{k+2} は整数であり，偶数となる

[I]，[II] より (*) が成立する．（証明終り）

(2) $x^2-2px-1=0$ の判別式を D とすると $\frac{D}{4}=p^2+1>0$

なので α, β は実数である．

$\alpha\beta=-1$ より $|\alpha||\beta|=1$．

$|\beta| = \frac{1}{|\alpha|}$，$|\alpha|>1$ より

$0<|\beta|<1 \cdots ②$

(1) より $\alpha^m = a_m - \beta^m$ （a_m は偶数）

ゆえに，

$$\sin(\alpha^m\pi) = \sin\{(a_m-\beta^m)\pi\} = \sin(a_m\pi - \beta^m\pi)$$

a_m は偶数なので

$$\begin{aligned}
&(-\alpha)^m\sin(\alpha^m\pi) \\
&= (-\alpha)^m\{-\sin(\beta^m\pi)\} \\
&= (-1)^{m+1}\alpha^m\cdot\beta^m\pi\cdot\frac{\sin(\beta^m\pi)}{\beta^m\pi} \\
&= (-1)^{m+1}(\alpha\beta)^m\cdot\pi\cdot\frac{\sin(\beta^m\pi)}{\beta^m\pi} \\
&= (-1)^{2m+1}\pi\cdot\frac{\sin(\beta^m\pi)}{\beta^m\pi} \quad (\alpha\beta=-1 \text{ より}) \\
&= -\pi\cdot\frac{\sin(\beta^m\pi)}{\beta^m\pi}
\end{aligned}$$

② より $\lim_{m\to\infty}\beta^m\pi = 0$

ゆえに $\lim_{m\to\infty}\frac{\sin(\beta^m\pi)}{\beta^m\pi} = 1$

よって，

$$\lim_{m\to\infty}(-\alpha)^m\sin(\alpha^m\pi) = -\pi \cdots \text{(答)}$$

$\boxed{3}$

・与えられた条件から

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}$$

なので，

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{1}{2}$$

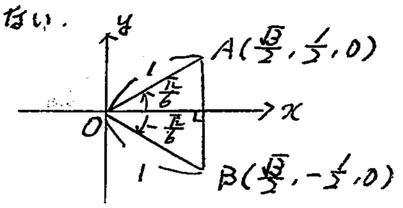
となり，

$$\angle AOB=\frac{\pi}{3}.$$

よって，座標軸をとりなおして，Oは原点のままで

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right),\quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

とし，Cは $z\geqq 0$ の範囲にあるとしてさしつかえない．



$C(p,q,r)$ $(r\geqq 0)$ とすると

$$|\overrightarrow{OC}|=1,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

より

$$\begin{cases} p^2+q^2+r^2=1, & \cdots ① \\ \frac{\sqrt{3}}{2}p+\frac{1}{2}q=-\frac{\sqrt{6}}{4}, & \cdots ② \\ \frac{\sqrt{3}}{2}p-\frac{1}{2}q=-\frac{\sqrt{6}}{4}. & \cdots ③ \end{cases}$$

②，③より

$$p=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad q=0$$

であり，これらを①に代入して

$$\frac{1}{2}+r^2=1 \quad すなわち \quad r^2=\frac{1}{2}.$$

ここで，$r\geqq 0$ なので

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって，

$$C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

さらに，$D(x,y,z)$ とすると，

$$|\overrightarrow{OD}|=1,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=k,$$
$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}$$

より，

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, & \cdots ④ \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=k. & \cdots ⑤ \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=k. & \cdots ⑥ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}z=\frac{1}{2}. & \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑤，⑥より

$$「x=\frac{2}{\sqrt{3}}k,\quad y=0.」\quad\cdots ⑧$$

$x=\frac{2}{\sqrt{3}}k$ を⑦に代入して

$$z=\frac{2}{\sqrt{3}}k+\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad\cdots ⑨$$

⑧，⑨を④に代入して

$$\frac{4}{3}k^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}k+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

整理して

$$8k^2+2\sqrt{6}k-\frac{3}{2}=0.$$

これと $k>0$ とから

$$k=\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{8}.\quad\cdots(答)$$

4

(iii)より，
$$n=3k\pm1 \quad (k\text{は整数})$$
と表せる．

(I) $n=3k+1$ のとき．
$$f(m,n)=m^3+(3k+1)^2+(3k+1)+3$$
$$=m^3-4+9(k^2+k+1).$$

$m=3l+r$ (lは整数，$r=0,1,2$) のとき，
$$m^3=9(3l^3+3l^2r+lr^2)+r^3.$$
r^3 は 0, 1, 8 のいずれか $\cdots$(*)

であり，$f(m,n)$ が 9 の倍数になることはないから，
$$A(m,n)\leqq1.$$

(II) $n=3k-1$ のとき．
$$f(m,n)=m^3+(3k-1)^2+(3k-1)+3$$
$$=m^3+3(3k^2-k+1).$$

$f(m,n)$ が 3 の倍数となるのは m が 3 の倍数のときである．

そこで，$m=3l$ (lは整数) とおくと，
$$f(m,n)=(3l)^3+3(3k^2-k+1)$$
$$=27l^3+3(3k^2-k+1).$$

$f(m,n)$ が 27 の倍数となるのは $3k^2-k+1$ が 9 の倍数のときである．

このとき $-k+1$ が 3 の倍数であることに注意すると，(ii)より，次表を得る．

k	1	4	7	10
$3k^2-k+1$	3	45	141	291

したがって，$3k^2-k+1$ が 9 の倍数となるのは $k=4$ のときである．このとき $n=11$ であり，
$$f(m,n)=27l^3+3\cdot45$$
$$=27(l^3+5).$$

(*)より，l^3+5 が 9 の倍数になることはなく，l^3+5 が 3 の倍数となるのは，(i)より，
$$l=1,4,7,10$$
のときである．

以上により，

求める最大値は 4 $\cdots$(答)

また，$A(m,n)=4$ となる (m,n) は

$(3,11)$, $(12,11)$, $(21,11)$, $(30,11)$ $\cdots$(答)

5

「どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない・・・(*)」
という条件を満たす数字の入れ方があったとき，その行や列を入れ替えてできる数字の入れ方もまた (*) を満たすものとなる．(下の例は 1 行目と 3 行目を入れ替えたもの)

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

4	1	2	3
3	4	1	2
1	2	3	4
2	3	4	1

条件を満たす数字の入れ方に対して、行の並び替えをすることで 1 列目に数字が上から 1, 2, 3, 4 の順に並ぶようにでき，さらに 2 列目から 4 列目の並び替えをすることで，1 行目に数字が左から 1, 2, 3, 4 の順に並ぶようにできる．

1	4	2	3
4	1	3	2
3	2	4	1
2	3	1	4

1	4	2	3
2	3	1	4
3	2	4	1
4	1	3	2

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

したがって，以下の形での残り 3×3 マスの数字の入れ方を考える．

1	2	3	4
2			
3			
4			

2 行 2 列目に入る数字で場合分けをする．

(i) 1 が入るとき，残りの数字の入れ方は下図の 2 通りである．

1	2	3	4
2	1		
3			
4			

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4		
4	3		

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

(ii) 3 が入るとき，残りの数字の入れ方は下図の 1 通りである．

1	2	3	4
2	3		
3			
4			

1	2	3	4
2	3		
3			
4			3

1	2	3	4
2	3	4	
3	4		
4			3

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

(iii) 4 が入るとき，残りの数字の入れ方は下図の 1 通りである．

1	2	3	4
2	4		
3			
4			

1	2	3	4
2	4		
3		4	
4			

1	2	3	4
2	4		3
3		4	
4	3		

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

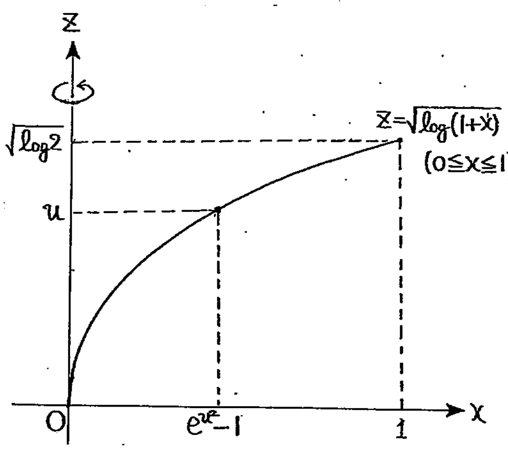
(i)〜(iii) より，残り 3×3 マスの数字の入れ方は 4 通りである．

そのそれぞれに対して、行の並び替えの方法が 4! 通りずつ，列の並び替えの方法が 3! 通りずつあるので，条件 (*) を満たす数字の入れ方は，

$$4 \times 4! \times 3! = 576 \text{ (通り)} \qquad \cdots (答)$$

ある．

6



Sを平面$z=u$ $(0\leqq u\leqq\sqrt{\log 2})$で切ったときの切り口$U$は，点$(0, 0, u)$を中心とする半径が$e^{u^2}-1$の円である．

$$U: x^2+y^2=(e^{u^2}-1)^2,\ z=u.$$

したがって

$$S: x^2+y^2=(e^{z^2}-1)^2\ (0\leqq z\leqq\sqrt{\log 2}).$$

Vを平面$x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$で切ったときの切り口V_tは，Sを平面$x=t$で切ったときの切り口S_tをx軸のまわりに1回転させるとき，S_tが通過した部分である．V_tの面積を$T(t)$とすると，Vはyz平面に関して対称だから，Vの体積Wは

$$W=2\int_0^1 T(t)\,dt.$$

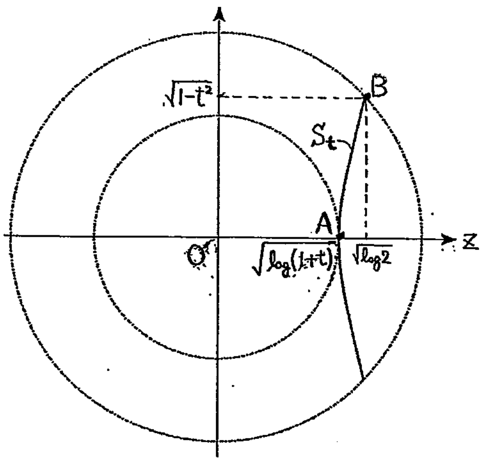
$$S_t: t^2+y^2=(e^{z^2}-1)^2,\ x=t\ (0\leqq z\leqq\sqrt{\log 2})$$

であり，

$$y=\pm\sqrt{(e^{z^2}-1)^2-t^2}$$

より，次の図のようになる．

（平面$x=t$上で）



$$z^2+y^2=z^2+(e^{z^2}-1)^2-t^2$$
$$(\sqrt{\log(1+t)}\leqq z\leqq\sqrt{\log 2})$$

は（zに関して）単調増加だから，V_tは（図の）O'を中心とする半径がO'A，O'Bの2つの円ではさまれた部分となる．

$$T(t)=\pi(\mathrm{O'B}^2-\mathrm{O'A}^2)$$
$$=\pi\{\log 2+1-t^2-\log(1+t)\}.$$

したがって，

$$W=2\pi\int_0^1\{\log 2+1-t^2-\log(1+t)\}\,dt$$
$$=2\pi\left[(\log 2+1)t-\frac{t^3}{3}-(1+t)\log(1+t)+t\right]_0^1$$
$$=2\pi\left(\log 2+1-\frac{1}{3}-2\log 2+1\right)$$
$$=2\pi\left(\frac{5}{3}-\log 2\right).\quad \text{…（答）}$$