1.

袋Aに赤玉が x 個，白玉が y 個，袋Bに赤玉が z 個，白玉が w 個入っている状態を $\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ と表す.

1回の操作の後に袋Aに白玉が2個以上入っているのは

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_3C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

と推移するときで，その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{3+1+2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$ 　　… (ア) (答)

である.

2回の操作の後に袋Aの中が白玉のみとなるには，1回目を終えた段階で袋Aに赤玉が3個以上あってはいけない．すなわち，1回目を終えた段階で袋Aには白玉が2個以上入っているから，(ア) の続きについて考察すればよい.

1回目終了後に $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ となる確率は $\frac{1}{2}$，$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ となる確率は $\frac{1}{10}$ である．2回目の操作で袋Aが白玉のみとなるのは

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_1C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

と推移するときであるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{15} = \boxed{\frac{2}{225}} \qquad \cdots \text{(イ) (答)}$$

である.

2.

(1)　$g(t)=t-\log(1+t)\ (t \geqq 0)$ とおく．

$$g'(t)=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}>0\ \ (t>0)$$

よって，$g(t)$ は単調増加関数．$g(0)=0$ なので $g(t) \geqq 0$ より

$$t \geqq \log(1+t)\ (t \geqq 0)$$

すなわち，$t \geqq 0$ のとき

$$\log(1+t) \leqq t \qquad \cdots (*)$$

$h(t)=\log(1+t)-\dfrac{t}{1+t}=\log(1+t)-\left(1-\dfrac{1}{1+t}\right)\ (t \geqq 0)$ とおく．

$$h'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{t}{(1+t)^2}>0\ \ (t>0)$$

よって，$h(t)$ は単調増加関数．$h(0)=0$ なので $h(t) \geqq 0$

よって，$t \geqq 0$ のとき

$$\frac{t}{1+t} \leqq \log(1+t)$$

(証明終り)

(2)

$$\log f_n(x)=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{pn}\right)$$

$$=\sum_{k=n}^{pn}\log\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

$\dfrac{x}{k}>0$ だから (1) において，$t=\dfrac{x}{k}$ とおくと

$$\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}} \leqq \log\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqq \frac{x}{k}$$

$$\frac{x}{k+x} \leqq \log\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqq \frac{x}{k}$$

$$x\sum_{k=n}^{pn}\frac{1}{k+x} \leqq \sum_{k=n}^{pn}\log\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqq x\sum_{k=n}^{pn}\frac{1}{k} \qquad \cdots ①$$

ここで，$k \geqq 2$ のとき，$k-1 \leqq x \leqq k$ ならば

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k-1}$$

だから

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,dx<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k-1}\,dx$$

$$\frac{1}{k}<\Big[\log x\Big]_{k-1}^{k}<\frac{1}{k-1}$$

$$\frac{1}{k}<\log k-\log(k-1)<\frac{1}{k-1} \qquad \cdots ②$$

2.（つづき1）

② の左側の不等式において，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} < \sum_{k=n}^{pn} \{\log k - \log(k-1)\} = \log pn - \log(n-1) = \log \frac{pn}{n-1}$$

② の右側の不等式において，$[x] = m$ とおくと $x < m+1$ だから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k+x} &> \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k+m+1} \\ &= \sum_{k=n+m+2}^{pn+m+2} \frac{1}{k-1} \\ &> \sum_{k=n+m+2}^{pn+m+2} \{\log k - \log(k-1)\} \\ &= \log(pn+m+2) - \log(n+m+1) \\ &= \log \frac{pn+m+2}{n+m+1}\end{aligned}$$

よって，① は

$$x \log \frac{pn+m+2}{n+m+1} < \log f_n(x) < x \log \frac{pn}{n-1}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{pn}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{p}{1-\dfrac{1}{n}} = \log p,$$

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{pn+m+2}{n+m+1} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{p+\dfrac{m+2}{n}}{1+\dfrac{m+1}{n}} = \log p$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} \log f_n(x) = x \log p = \log p^x$$

したがって

$$f(x) = p^x. \qquad \cdots(\text{答})$$

2．（つづき２）

【別解】

(2)　$\log f_n(x)=\sum_{k=n}^{pn}\log\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

$n\leqq k\leqq pn$ ， $x>0$ のとき，$\frac{x}{k}\geqq 0$ であるから，(1)で示した不等式において $t=\frac{x}{k}$ とおくことができ，

$$\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}\leqq\log\left(1+\frac{x}{k}\right)\leqq\frac{x}{k}.$$

$$\sum_{k=n}^{pn}\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}\leqq\sum_{k=n}^{pn}\log\left(1+\frac{x}{k}\right)\leqq\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k}.$$

$$\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k+x}\leqq\log f_n(x)\leqq\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k}.\qquad\cdots ①$$

ここで，$[x]=m$ とおくと $x<m+1$ であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k+x}&>\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k+m+1}=\sum_{\ell=n+m+1}^{pn+m+1}\frac{x}{\ell}\\&=\sum_{\ell=n+1}^{pn}\frac{x}{\ell}+\sum_{\ell=pn+1}^{pn+m+1}\frac{x}{\ell}-\sum_{\ell=n+1}^{n+m}\frac{x}{\ell}\\&>\sum_{\ell=n+1}^{pn}\frac{x}{\ell}+\sum_{\ell=pn+1}^{pn+m+1}\frac{x}{pn+m+1}-\sum_{\ell=n+1}^{n+m}\frac{x}{n+1}\\&=\sum_{\ell=n+1}^{pn}\frac{x}{\ell}+\frac{(m+1)x}{pn+m+1}-\frac{mx}{n+1}\qquad\cdots ②\end{aligned}$$

①, ②より，

$$\sum_{\ell=n+1}^{pn}\frac{x}{\ell}+\frac{(m+1)x}{pn+m+1}-\frac{mx}{n+1}<\log f_n(x)\leqq\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k}.$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{x}{\frac{k}{n}}\right)=0+\int_1^p\frac{x}{t}dt=\Big[x\log|t|\Big]_1^p=x\log p=\log p^x,$$

2．（つづき３）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\ell=n+1}^{pn}\frac{x}{\ell}+\frac{(m+1)x}{pn+m+1}-\frac{mx}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=n+1}^{pn}\frac{x}{\frac{\ell}{n}}+0-0=\int_1^p\frac{x}{t}dt=\log p^x$$

であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\log f_n(x)=\log p^x.$$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=p^x.$$

したがって，　$f(x)=p^x$.　…（答）

３．

(1)　k，ℓ を自然数とする．

　a が 2^n の倍数であるが 2^{n+1} の倍数ではないとき，$a=2^n(2k-1)$ とかける．

　b が 4 の倍数でないとき，$b=2\ell-1$ または $b=2(2\ell-1)$ と表せる．

(ⅰ)　$b=2\ell-1$ のとき，

$$2a(2a+b)=2^{n+1}(2k-1)\{2^{n+1}(2k-1)+2\ell-1\}.$$

　$(2k-1)\{2^{n+1}(2k-1)+2\ell-1\}$ は奇数なので，$2a(2a+b)$ は 2^{n+1} の倍数であるが，2^{n+2} の倍数ではない．

(ⅱ)　$b=2(2\ell-1)$ のとき，

$$a(a+b)=2^n(2k-1)\{2^n(2k-1)+2(2\ell-1)\}=2^{n+1}(2k-1)\{2^{n-1}(2k-1)+2\ell-1\}.$$

　$n\geqq 2$ であるから $(2k-1)\{2^{n-1}(2k-1)+2\ell-1\}$ は奇数．よって，$a(a+b)$ は 2^{n+1} の倍数であるが，2^{n+2} の倍数ではない．

　(ⅰ)(ⅱ)より，$a(a+b)$，$2a(2a+b)$ のいずれかは，2^{n+1} の倍数であるが，2^{n+2} の倍数ではない．　(証明終り)

(2)　$x=\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ とする．

　$n\geqq 3$ のとき $n-1\geqq 2$ であるから，(1) の n を $n-1$ としたものが成り立つ．

　つまり，a が 2^{n-1} の倍数であるが 2^n の倍数ではないとき，

$b=2\ell-1$ のときは $2a(2a+b)$，$b=2(2\ell-1)$ のときは $a(a+b)$

が 2^n の倍数であるが 2^{n+1} の倍数ではない．

　したがって，たとえば $a=2^{n-1}$ として，

$b=2\ell-1$ のときは $a_n=2\cdot 2^{n-1}$，$b=2(2\ell-1)$ のときは $a_n=2^{n-1}$

とおくと，$a_n(a_n+b)=2^n(2m-1)$ (m は自然数) とおける．

　このとき，$10^n x=5^n\cdot 2^n\cdot\dfrac{2^n(2m-1)}{2^{2n}}=5^n(2m-1)$ は一の位が 5 である自然数なので，$x=\dfrac{5^n(2m-1)}{10^n}$ は小数第 n 位の数字が 5 である小数第 n 位までの有限小数である．

　よって，題意は示された．　(証明終り)

4.

(1) 点Aの y 座標を a $(a>0)$ とすると，線分OAの長さは $\sqrt{(\sqrt{a})^2+a^2}=\sqrt{a+a^2}$ である．

同じく，点B，Cの y 座標を b，c (>0) とすると，線分OB，OCの長さは $\sqrt{b+b^2}$，$\sqrt{c+c^2}$ である．

そして，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ から $a=b=c$ を得る．すなわち，A，B，Cの y 座標は a で等しい．

さらに正三角形ABCの外接円の半径が $\sqrt{a}$ であることから，1辺ABの長さは $\sqrt{3}\sqrt{a}$ である．

$\mathrm{OA}=\mathrm{AB}$ から $\sqrt{a+a^2}=\sqrt{3a}$ を得る．ここから，$a=2$ を得るから，1辺の長さは $\sqrt{6}$ とわかる．　…　**(答)**

(2) 三角形ABCの重心Gは y 軸上にある．さらに，平面ABCの方程式は $y=a(=2)$ であり，平面ABCは y 軸に垂直である．

対称性から，線分AB，ACが xy 平面と点A以外の共有点を持つ場合を考えればよい．そこで，線分AB，ACと xy 平面との交点をP，Qとすると，直線PQと直線OGは垂直である．

よって，四面体の xy 平面による断面 (三角形OPQ) の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OG}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\mathrm{PQ}=\mathrm{PQ}$$

と表せる．したがって，線分PQの長さの最小値を考えればよい．

ここで，$\mathrm{AP}=u\sqrt{6}$，$\mathrm{AQ}=v\sqrt{6}$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(0<u\leqq1,\ 0<\leqq v\leqq1)$ と表せ，

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3u}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{3v}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と表せる．

Gが線分PQ上にあることから，$\frac{1}{3u}+\frac{1}{3v}=1$ が成り立ち，すなわち，$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=3$ である．

三角形OPQで余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=\sqrt{(\sqrt{6}u)^2+(\sqrt{6}v)^2-2\sqrt{6}u\cdot\sqrt{6}v\cdot\cos60^\circ}\\&=\sqrt{6}\sqrt{u^2+v^2-uv}=\sqrt{6}\sqrt{(u+v)^2-3uv}\end{aligned}$$

ここで，$uv=k$ とおくと，$\frac{u+v}{uv}=3$ より，$u+v=3k$ である．

したがって，$\mathrm{PQ}=\sqrt{6}\sqrt{9k^2-3k}=\sqrt{6}\sqrt{9\left(k-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{4}}$ である．

4. (つづき 1)

さて，

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{uv}=\frac{1}{u}\left(3-\frac{1}{u}\right)$$
$$=\frac{9}{4}-\left(\frac{1}{u}-\frac{3}{2}\right)^2$$

また，$\frac{1}{u}\geqq 1$，$\frac{1}{v}=3-\frac{1}{u}\geqq 1$ より，$1\leqq\frac{1}{u}\leqq 2$ である．

よって，$2\leqq\frac{1}{k}\leqq\frac{9}{4}$ だから，$\frac{4}{9}\leqq k\leqq 2$.　　…①

ゆえに，線分 PQ の長さは $k=\frac{4}{9}$ のときに最小値 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ をとる．

以上より，断面積の最小値は $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ である．　　**…　(答)**

【(2) の別解 1】

余弦定理より，$\mathrm{OP}=\sqrt{6}\sqrt{1+u^2-u}$，$\mathrm{OQ}=\sqrt{6}\sqrt{1+v^2-v}$，
$\mathrm{PQ}=\sqrt{6}\sqrt{u^2+v^2-uv}$ であり，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とすると，

$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-\mathrm{PQ}^2}{2\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}}=\dfrac{2-u-v+uv}{2\sqrt{1+u^2-u}\sqrt{1+v^2-v}}$ である．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta=3(2-u-v+uv)$ である．

三角形 OPQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{4(1+u^2-u)(1+v^2-v)-(2-u-v+uv)^2}$$

さて，$uv=k$ とおくと，$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{u+v}{uv}=3$ から，$u+v=3uv=3k$ である．

よって，$2-(u+v)+uv=2-3k+k=2-2k$ と表せる．

また，

$$(1+u^2-u)(1+v^2-v)=1-(u+v)+uv+(u^2+v^2)-uv(u+v)+u^2v^2$$
$$=1-3k+k+(9k^2-2k)-3k^2+k^2$$
$$=7k^2-4k+1$$

であるから，

$$S=\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{7k^2-4k+1-(1-k)^2}=3\sqrt{6k^2-2k}=3\sqrt{6\left(k-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}}$$

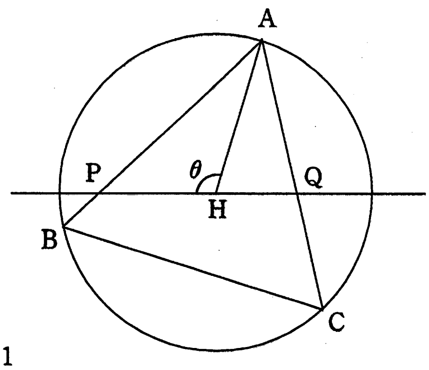
と表せる．

一方，①より，$\frac{4}{9}\leqq k\leqq\frac{1}{2}$ である．

よって，S は $k=\frac{4}{9}$ のときに最小となり，最小値は $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ である．　　**…　(答)**

4．（つづき２）

【(2) の別解２】



△ABC は平面 $y=2$ 上に存在するので，図のように半径 $\sqrt{2}$ の円に内接する．ここで，$\angle\mathrm{AHP}=\theta$ とおくと，$\frac{\pi}{3}\leqq\theta<\frac{2}{3}\pi$ であり，このとき，

$$\angle\mathrm{APH}=\frac{5}{6}\pi-\theta,$$

$$\angle\mathrm{AQH}=\theta-\frac{\pi}{6}$$

である．△APH で正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{PH}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\mathrm{AH}}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)} \qquad \therefore\ \mathrm{PH}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}.$$

また，△AQH で正弦定理を用いると，　$\mathrm{QH}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$.

したがって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}+\frac{1}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin\frac{5}{6}\pi\cos\theta-\cos\frac{5}{6}\pi\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}+\frac{2}{\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta}\right)\\
&=\frac{2\sqrt{6}\sin\theta}{3\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{6}\sin\theta}{4\sin^2\theta-1}.
\end{aligned}$$

ここで，$\frac{\pi}{3}\leqq\theta<\frac{2\pi}{3}$ であるから，$\sin\theta=X\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq X\leqq 1\right)$ とおき，$f(X)=\dfrac{2\sqrt{6}X}{4X^2-1}$ とおく．

$$f'(X)=2\sqrt{6}\cdot\frac{1\cdot(4X^2-1)-X\cdot 8X}{(4X^2-1)^2}=2\sqrt{6}\cdot\frac{-4X^2-1}{(4X^2-1)^2}<0$$

であるから，$f(X)$ は単調減少し，$X=1$，すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ のときに PQ は最小値 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ をとる．

PQ の長さが最小のとき，△OPQ の面積も最小となり，その値は

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot 2=\frac{2\sqrt{6}}{3}. \qquad \cdots(答)$$