1

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2(6x-7)}$ $\left(x\neq 0,\ \dfrac{7}{6}\right)$ より,

$$f'(x)=-\frac{18x^2-14x}{x^4(6x-7)^2}=-\frac{2x(9x-7)}{x^4(6x-7)^2}$$

であるから, $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{7}{9}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\times$	$\nearrow$	$-\frac{243}{343}$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$

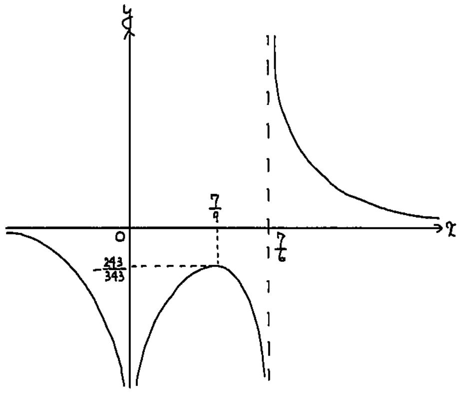
極大値 $f\left(\dfrac{7}{9}\right)=-\dfrac{243}{343}$, 極小値なし.

また,

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to 0}f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{7}{6}-0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\frac{7}{6}+0}f(x)=\infty.$$

よって, C の概形は次図のようになる.



(2) $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{6x-7}$ より,

$$\frac{1}{x^2(6x-7)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{6x-7}$$

$$1=ax(6x-7)+b(6x-7)+cx^2$$

$$1=(6a+c)x^2-(7a-6b)x-7b$$

係数を比較して,

$$\begin{cases}6a+c=0,\\ -7a+6b=0,\\ -7b=1.\end{cases}$$

これより,

$$a=-\frac{6}{49},\quad b=-\frac{1}{7},\quad c=\frac{36}{49}.$$

(3) C と $l: y=f\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$ の共有点の x 座標は,

$$\frac{1}{x^2(6x-7)}=-1$$

より,

$$x^2(6x-7)=-1$$

$$6x^3-7x^2+1=0$$

$$(3x+1)(2x^2-3x+1)=0$$

$$(3x+1)(2x-1)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1.$$

よって, 求める交点は,

$$\left(-\frac{1}{3},-1\right),\ \left(\frac{1}{2},-1\right),\ (1,-1).$$

(4) $\beta=\dfrac{1}{2}$, $\gamma=1$ である.

求める面積を S とすると,

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\frac{1}{x^2(6x-7)}-(-1)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{-\frac{6}{49}\left(\frac{1}{x}+\frac{7}{6x^2}-\frac{6}{6x-7}\right)+1\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{6}{49}\left(\log|x|-\frac{7}{6x}-\log|6x-7|\right)+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

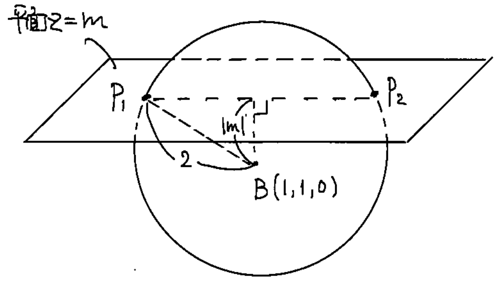
$$=\frac{8}{7}-\left(\frac{18}{49}\log 2+\frac{11}{14}\right)$$

$$=\frac{5}{14}-\frac{18}{49}\log 2.$$

© 河合塾 2020年

$\boxed{2}$

(1) Cは平面 $y=1$ 上のBを中心とする半径2の円である.



Cと平面$z=m$が異なる2点で交わる条件は,

$$|m|<2$$
$$-2<m<2$$

であり, $P_1P_2=3$ となるとき,

$$2\sqrt{2^2-|m|^2}=3$$
$$16-4m^2=9$$
$$m^2=\frac{7}{4}$$
$$m=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

(これは $-2<m<2$ を満たす)

(2) C上の点Pは, 実数θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を用いて,

$$\vec{OP}=\vec{OB}+\vec{BP}$$
$$=(1,1,0)+(2\cos\theta,0,2\sin\theta)$$
$$=(2\cos\theta+1,1,2\sin\theta)$$

と表せ,

$$|\vec{OP}|=\sqrt{(2\cos\theta+1)^2+1^2+(2\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{6+4\cos\theta}.$$

また,

$$\vec{OA}=(1,0,0),\quad |\vec{OA}|=1.$$

よって, $\angle AOP=45^\circ$ となるとき,

$$\vec{OA}\cdot\vec{OP}=|\vec{OA}||\vec{OP}|\cos45^\circ$$
$$2\cos\theta+1=\sqrt{3+2\cos\theta}$$
$$4\cos^2\theta+4\cos\theta+1=3+2\cos\theta \text{ かつ } 2\cos\theta+1>0$$
$$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0 \text{ かつ } \cos\theta>-\frac{1}{2}$$
$$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0 \text{ かつ } \cos\theta>-\frac{1}{2}$$

よって,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$
$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi.$$

したがって, 求めるPの座標は,

$$(2,1,\sqrt{3}),\ (2,1,-\sqrt{3}).$$

(3) Dは平面 $x=1$ 上のBを中心とする半径3の円より,

$$D:(y-1)^2+z^2=9,\ x=1.$$

O, P, Qが一直線上にあるとき, Qは実数kを用いて,

$$\vec{OQ}=k\vec{OP}=(k(2\cos\theta+1),k,2k\sin\theta)$$

すなわち,

$$Q(k(2\cos\theta+1),k,2k\sin\theta)$$

と表せる.

また, QはD上にあるから,

$$\begin{cases}(k-1)^2+4k^2\sin^2\theta=9, & \cdots① \\ k(2\cos\theta+1)=1. & \cdots②\end{cases}$$

②より, $k\neq0$ であり,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-1\right).$$

これと①より,

$$(1+4\sin^2\theta)k^2-2k-8=0$$
$$(5-4\cos^2\theta)k^2-2k-8=0$$
$$\left\{5-\left(\frac{1}{k}-1\right)^2\right\}k^2-2k-8=0$$
$$4k^2-9=0$$
$$k=\pm\frac{3}{2}.$$

よって

$$(k,\cos\theta,\sin\theta)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{6},\pm\frac{\sqrt{35}}{6}\right),\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{6},\pm\frac{\sqrt{11}}{6}\right).$$

したがって, 求めるP, Qの組は,

$$P\left(\frac{2}{3},1,\pm\frac{\sqrt{35}}{3}\right) と Q\left(1,\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{35}}{2}\right),$$
$$P\left(-\frac{2}{3},1,\pm\frac{\sqrt{11}}{3}\right) と Q\left(1,-\frac{3}{2},\mp\frac{\sqrt{11}}{2}\right).$$

(複号同順)

© 河合塾　2020年

$\boxed{3}$

(1) $f(x)=x\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{-x}$ より,

$$f'(x)=\left(\frac{3}{2}-2x\right)e^{-x}+\left(\frac{3}{2}x-x^2\right)\left(-e^{-x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2x-1)(x-3)e^{-x}$$

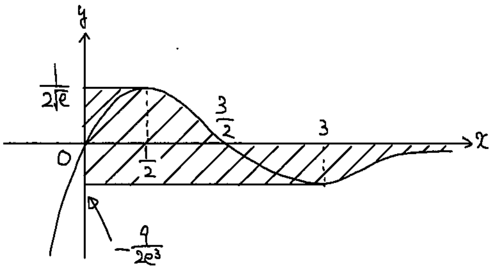
であるから, $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\searrow$	$-\frac{9}{2e^3}$	$\nearrow$

極大値 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{e}}$, 極小値 $f(3)=-\frac{9}{2e^3}$.

(2) C_a は $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-a$ だけ平行移動したグラフの $x\geqq 0$ を満たす部分である.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意すると, D は次図の斜線部分である. ただし, 境界は x 軸の $x>\frac{3}{2}$ の部分を除く.



(3) 求める面積を S とすると,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e}}+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}x\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{e}}+\left[-x\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}-2x\right)e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{e}}+\frac{1}{2\sqrt{e}}+\left[-\left(\frac{3}{2}-2x\right)e^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}2e^{-x}dx$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{e}}+\left(\frac{3}{2e\sqrt{e}}+\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)+\left[2e^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

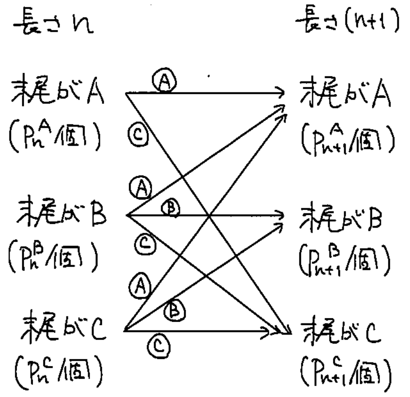
$$=\frac{5}{4\sqrt{e}}+\frac{3}{2e\sqrt{e}}+\left(\frac{2}{e\sqrt{e}}-\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$$

$$=\frac{14-3e}{4e\sqrt{e}}.$$

© 河合塾　2020年

$\boxed{4}$

(1) 長さnと長さ$(n+1)$のAB禁止文字列の関係は次のようになる.



(Ⓐ, Ⓑ, Ⓒは末尾に追加する文字を表す)

これより,

$$\begin{cases} P_{n+1}^A = P_n^A + P_n^B + P_n^C, \\ P_{n+1}^B = P_n^B + P_n^C, \\ P_{n+1}^C = P_n^A + P_n^B + P_n^C. \end{cases}$$

また, $P_n^A + P_n^B + P_n^C = P_n$ であるから,

$$P_{n+1}^A = P_n,\quad P_{n+1}^C = P_n,\quad P_{n+1}^B = P_n^B + P_n^C.$$

(2)
$$\begin{aligned} P_{n+2} &= P_{n+2}^A + P_{n+2}^B + P_{n+2}^C \\ &= P_{n+1} + (P_{n+1}^B + P_{n+1}^C) + P_n \\ &= 2P_{n+1} + (P_{n+1} - P_{n+1}^A) \\ &= 3P_{n+1} - P_n. \end{aligned}$$

(3) $x^2 - 3x + 1 = 0$ の解を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと,

$$\alpha + \beta = 3,\quad \alpha\beta = 1.$$

これより,

$$P_{n+2} = (\alpha + \beta)P_{n+1} - \alpha\beta P_n$$

と表せるから,

$$P_{n+2} - \alpha P_{n+1} = \beta(P_{n+1} - \alpha P_n)$$

および

$$P_{n+2} - \beta P_{n+1} = \alpha(P_{n+1} - \beta P_n).$$

(4) (3)の α, β は,

$$\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$P_{n+2} - \alpha P_{n+1} = \beta(P_{n+1} - \alpha P_n)$ より,

$$P_{n+1} - \alpha P_n = (P_2 - \alpha P_1)\beta^{n-1}. \quad \cdots ①$$

$P_{n+2} - \beta P_{n+1} = \alpha(P_{n+1} - \beta P_n)$ より,

$$P_{n+1} - \beta P_n = (P_2 - \beta P_1)\alpha^{n-1}. \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$(\beta - \alpha)P_n = (P_2 - \alpha P_1)\beta^{n-1} - (P_2 - \beta P_1)\alpha^{n-1}$$

$$P_n = \frac{1}{\beta - \alpha}\left\{(P_2 - \alpha P_1)\beta^{n-1} - (P_2 - \beta P_1)\alpha^{n-1}\right\}.$$

よって,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(P_2 - \alpha P_1)\beta^n - (P_2 - \beta P_1)\alpha^n}{(P_2 - \alpha P_1)\beta^{n-1} - (P_2 - \beta P_1)\alpha^{n-1}}$$

$$= \frac{(P_2 - \alpha P_1)\beta - (P_2 - \beta P_1)\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}}{(P_2 - \alpha P_1) - (P_2 - \beta P_1)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}}.$$

$0 < \dfrac{\alpha}{\beta} < 1$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(P_2 - \alpha P_1)\beta}{P_2 - \alpha P_1} = \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

© 河合塾　2020年

5

(1) $\left[\frac{k^3}{n}\right]=m$ とおくと，n と k が互いに素であるから

$$m<\frac{k^3}{n}<m+1.$$

このとき，

$$\frac{(n-k)^3}{n}=n^2-3nk+3k^2-\frac{k^3}{n}$$

について，

$$n^2-3nk+3k^2-(m+1)<\frac{(n-k)^3}{n}<n^2-3nk+3k^2-m$$

より，

$$\left[\frac{(n-k)^3}{n}\right]=n^2-3nk+3k^2-m-1$$

よって，

$$\left[\frac{k^3}{n}\right]+\left[\frac{(n-k)^3}{n}\right]=n^2-3nk+3k^2-1.$$

(2) $p=2$ のとき，

$$\begin{aligned}S_p&=S_2\\&=\sum_{k=1}^{1}\left[\frac{k^3}{2}\right]\\&=\left[\frac{1}{2}\right]\\&=0.\end{aligned}$$

$p\geqq 3$ のとき，p は奇数であり，

$$\begin{aligned}S_p&=\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{k^3}{p}\right]\\&=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{k^3}{p}\right]+\left[\frac{(p-k)^3}{p}\right]\right)\\&=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(p^2-3pk+3k^2-1)\\&=(p^2-1)\cdot\frac{p-1}{2}-3p\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\cdot p\\&=\frac{1}{8}(p-1)(p+1)\{4(p-1)-3p+p\}\\&=\frac{1}{4}(p-2)(p-1)(p+1).\end{aligned}$$

これは $p=2$ のときも成り立つから，

$$S_p=\frac{1}{4}(p-2)(p-1)(p+1).$$

また，

$$\begin{aligned}S_{23}&=\frac{1}{4}\cdot21\cdot22\cdot24\\&=2772.\end{aligned}$$

(3) $p=2$ のとき，

$$\begin{aligned}S_{p^2}&=S_4\\&=\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{k^3}{4}\right]\\&=\left[\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{8}{4}\right]+\left[\frac{27}{4}\right]\\&=8.\end{aligned}$$

$p\geqq 3$ のとき，p は奇数であり，

$k\neq lp$（l：自然数）のとき，

$$\left[\frac{k^3}{p^2}\right]+\left[\frac{(p^2-k)^3}{p^2}\right]=p^4-3p^2k+3k^2-1.$$

$k=lp$（l：自然数）のとき，

$$\begin{aligned}\left[\frac{k^3}{p^2}\right]+\left[\frac{(p^2-k)^3}{p^2}\right]&=\left[\frac{l^3p^3}{p^2}\right]+\left[\frac{p^3(p-l)^3}{p^2}\right]\\&=l^3p+p(p-l)^3\\&=p^4-3p^3l+3p^2l^2\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}S_{p^2}&=\sum_{k=1}^{p^2-1}\left[\frac{k^3}{p^2}\right]\\&=\sum_{k=1}^{\frac{p^2-1}{2}}(p^4-3p^2k+3k^2-1)+1\cdot\frac{p-1}{2}\\&=\frac{1}{4}(p^2-2)(p^2-1)(p^2+1)+\frac{p-1}{2}\\&=\frac{1}{4}(p-1)\{(p^2-2)(p+1)(p^2+1)+2\}\\&=\frac{1}{4}p(p-1)(p^4+p^3-p^2-p-2).\end{aligned}$$

これは，$p=2$ のときも成り立つから，

$$S_{p^2}=\frac{1}{4}p(p-1)(p^4+p^3-p^2-p-2).$$

また，

$$\begin{aligned}S_{25}&=\frac{1}{4}\cdot5\cdot4\cdot(625+125-25-5-2)\\&=3590.\end{aligned}$$

© 河合塾　2020 年