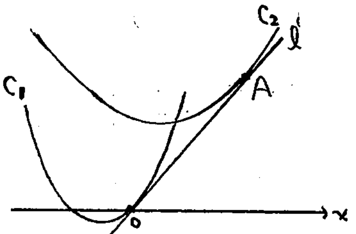
[1]



(1) $f(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$ より,

$$f'(x)=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}.$$

l が C_1 と原点で接するので,

$$m=f'(0)=\frac{1}{3}.$$

(2) (1)の結果より,

$$l:\ y=\frac{1}{3}x.$$

l が C_2 と接するので,

$$\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}(x-p)^2+q$$

すなわち,

$$x^2-2(p+1)x+p^2+6q=0 \cdots (*)$$

の判別式を D とおくと, $D=0$.

よって,

$$\frac{D}{4}=(p+1)^2-(p^2+6q)=0$$

より,

$$q=\frac{1}{3}p+\frac{1}{6}.$$

このとき, (*)より,

$$x^2-2(p+1)x+p^2+2p+1=0 \Leftrightarrow \{x-(p+1)\}^2=0.$$

よって,

$$A\left(p+1,\ \frac{p+1}{3}\right).$$

(3) C_1 と C_2 の2つの交点の x 座標は,

$$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}(x-p)^2+\frac{1}{3}p+\frac{1}{6}$$
$$3x^2+2(p+1)x-(p+1)^2=0$$
$$\{x+(p+1)\}\{3x-(p+1)\}=0$$

より,

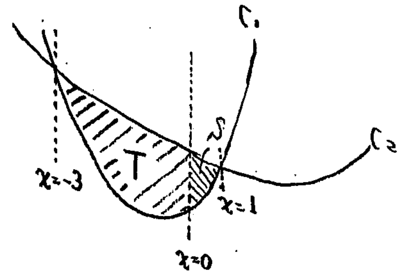
$$x=-p-1,\ \frac{p+1}{3}.$$

(4) $p=2$ のとき,

$$C_2:\ y=f(x)=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}$$

であり, C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$-3,\ 1.$$

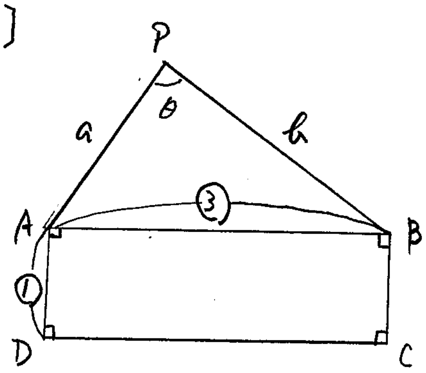


よって,

$$S=\int_0^1\left\{\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1$$
$$=\frac{5}{6}.$$

$$T=\int_{-3}^0\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_{-3}^0$$
$$=\frac{9}{2}.$$

[2]



(1) △PAB において，余弦定理により

$$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}.$$

(2) (1) より

$S=$(三角形PABの面積)+(長方形ABCDの面積)

$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+AB\cdot AD$$

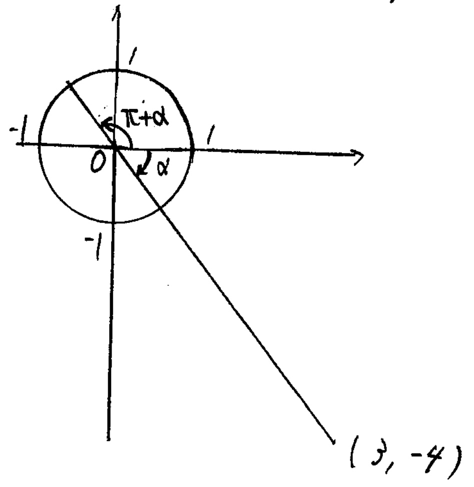
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{3}(a^2+b^2-2ab\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+b^2)+\frac{1}{6}(3\sin\theta-4\cos\theta)ab.$$

(3) $f(\theta)=3\sin\theta-4\cos\theta$ とおくと

$$f(\theta)=5\sin(\theta+\alpha).$$

$$\left(\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=-\frac{4}{5}\right)$$



$0<\theta<\pi$ より

$$\alpha<\theta+\alpha<\pi+\alpha.$$

よって，$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ のとき，$f(\theta)$ は最大値 5 をとり，

$$M=\frac{1}{3}(a^2+b^2)+\frac{1}{6}\cdot5\cdot ab$$

$$=\frac{1}{6}(2a^2+5ab+2b^2).$$

$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ より

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\cos\alpha$$

$$=\frac{3}{5},$$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\sin\alpha$$

$$=-\frac{4}{5}.$$

(4) $\cos\beta=-\frac{4}{5}$ より

$$AB=\sqrt{16^2+25^2-2\cdot16\cdot25\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)}$$

$$=\sqrt{1521}$$

$$=39.$$

よって，P と直線 AB の距離を h とすると，三角形PAB の面積について

$$\frac{1}{2}\cdot39\cdot h=\frac{1}{2}\cdot16\cdot25\sin\beta$$

$$39h=16\cdot25\cdot\frac{3}{5}$$

$$h=\frac{80}{13}.$$

[3] (1) $a_1+a_2=7$ となるのは,

$(a_1,a_2)=(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ の6通り.

よって,求める確率は,

$\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$.

(2) $l_1=1$ となるのは,

a_1	硬貨
1	表or裏
2	表
3	表
4	表
5	表
6	表

よって,求める確率は,

$\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times 5=\frac{7}{12}$.

(3) $\vec{l}=(1,1)$ である事象をA, $\vec{a}=(1,6)$ である事象をBとする.

(2)と同様に, $l_2=1$ となる確率は $\frac{7}{12}$ であるから, Aが起こる確率 $P(A)$ は,

$P(A)=\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{49}{144}$.

$a_1=1$ かつ $l_1=1$ となる確率は,

$\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}$.

$a_2=6$ かつ $l_2=1$ となる確率は,

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

よって, $A\cap B$ が起こる確率 $P(A\cap B)$ は,

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{72}$.

よって,求める確率 $P_A(B)$ は,

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{72}}{\frac{49}{144}}=\frac{2}{49}$.

(4) $(a_1,l_1)=(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)$ となる確率は,

それぞれ, $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

$(a_2,l_2)=(1,1)$ となる確率は, $\frac{1}{6}$.

$(a_2,l_2)=(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)$ となる確率は,

それぞれ, $\frac{1}{12}$.

$a_1+a_2=7$ である事象をCとすると,

Cが起こるのは,

$(a_1,a_2)=(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$.

の場合であるから, $A\cap C$ が起こる確率 $P(A\cap C)$ は,

$P(A\cap C)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}$

$+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{18}$.

よって,求める確率 $P_A(C)$ は,

$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{49}{144}}=\frac{8}{49}$.

〔4〕 (i) $a_1=1$

(ii) $a_{2n}=-a_{2n-1}+1$ ···①

$a_{2n+1}=-2a_{2n}+3$ ···②

(1) $a_2=-a_1+1=0$,

$a_3=-2a_2+3=3$,

$a_4=-a_3+1=-2$,

$a_5=-2a_4+3=7$.

(2) ①, ② より

$a_{2n+1}=-2(-a_{2n-1}+1)+3$

$=2a_{2n-1}+1$.

$b_{n+1}=2b_n+1$, $b_1=a_1=1$.

これを変形すると

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$.

数列 $\{b_n+1\}$ は公比 2 の等比数列なので,

$b_n+1=(b_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^n$.

よって,

$b_n=2^n-1$.

① より

$c_n=a_{2n}=-b_n+1=-2^n+2$.

(3)

$T_n=\sum_{k=1}^{2m-1} a_k$

$=\sum_{l=1}^{m}(a_{2l-1}+a_{2l})-a_{2m}$

$=\sum_{l=1}^{m}(b_l+c_l)-c_m$

$=\sum_{l=1}^{m} 1-(-2^m+2)$

$=m+2^m-2$.