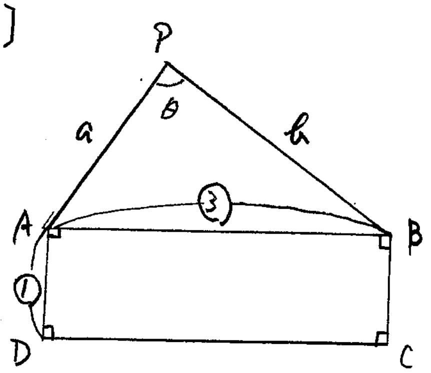
[1]



(1) △PABにおいて，余弦定理により

$$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}.$$

(2) (1)より

S=(三角形PABの面積)+(長方形ABCDの面積)

$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+AB\cdot AD$$

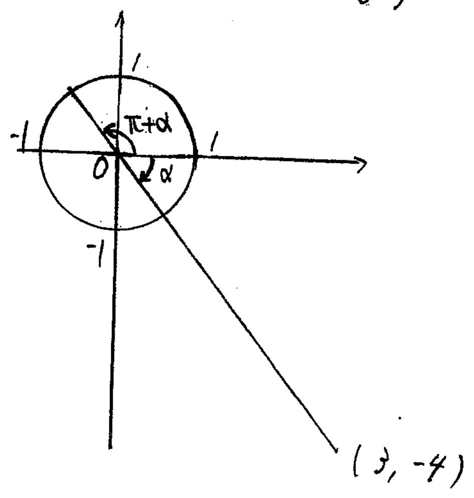
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{3}(a^2+b^2-2ab\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+b^2)+\frac{1}{6}(3\sin\theta-4\cos\theta)ab.$$

(3) $f(\theta)=3\sin\theta-4\cos\theta$ とおくと

$$f(\theta)=5\sin(\theta+\alpha).$$

$$\left(\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=-\frac{4}{5}\right)$$



$0<\theta<\pi$ より

$$\alpha<\theta+\alpha<\pi+\alpha.$$

よって，$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ のとき，$f(\theta)$は最大値 5 をとり，

$$M=\frac{1}{3}(a^2+b^2)+\frac{1}{6}\cdot 5\cdot ab$$

$$=\frac{1}{6}(2a^2+5ab+2b^2).$$

$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ より

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{3}{5},$$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=-\frac{4}{5}.$$

(4) $\cos\beta=-\frac{4}{5}$ より

$$AB=\sqrt{16^2+25^2-2\cdot 16\cdot 25\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)}=\sqrt{1521}=39.$$

よって，Pと直線ABの距離をhとすると，三角形PABの面積について

$$\frac{1}{2}\cdot 39\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 25\sin\beta$$

$$39h=16\cdot 25\cdot\frac{3}{5}$$

$$h=\frac{80}{13}.$$

〔2〕(1)
$$w=\frac{z-i}{z+1}$$
$$=1+\frac{-(1+i)}{z+1}$$

$z\neq -1$ のとき
$$\frac{-(1+i)}{z+1}\neq 0$$
であるから $w\neq 1$ である。

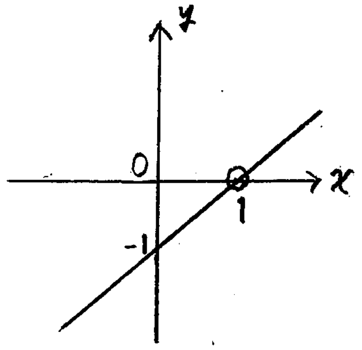
また，
$$w(z+1)=z-i$$
$$z(w-1)=-(w+i)$$
$w\neq 1$ より
$$z=-\frac{w+i}{w-1}.$$

(2) 複素数 z の実部が t であるから，
$$\frac{z+\bar{z}}{2}=t$$
が成り立つ．(1)の z をこれに代入して
$$\frac{w+i}{w-1}+\frac{\bar{w}-i}{\bar{w}-1}=-2t.$$
両辺に $(w-1)(\bar{w}-1)$ をかけて
$$(w+i)(\bar{w}-1)+(\bar{w}-i)(w-1)$$
$$=-2t(w-1)(\bar{w}-1).$$
これを整理して
$$(2t+2)w\bar{w}-(2t+1)w-(2t+1)\bar{w}$$
$$-(w-\bar{w})i=-2t.$$
$t\neq -1$ であるから
$$w\bar{w}-\frac{2t+1+i}{2t+2}w-\frac{2t+1-i}{2t+2}\bar{w}$$
$$=\frac{-t}{t+1}$$

$$\left(w-\frac{2t+1-i}{2t+2}\right)\left(\bar{w}-\frac{2t+1+i}{2t+2}\right)$$
$$-\frac{(2t+1)^2+1}{(2t+2)^2}=\frac{-t}{t+1}$$
$$\left|w-\frac{2t+1-i}{2t+2}\right|^2=\frac{1}{2(t+1)^2}$$
$$\left|w-\frac{2t+1-i}{2t+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}|t+1|}.$$
したがって，中心 P_t に対応する複素数は
$$\frac{2t+1-i}{2t+2}$$
となる。

(3) (2)より，
$$P_t=X+Yi\ (X,Y\text{は実数})$$
とおくと，
$$X=\frac{2t+1}{2t+2}\quad\cdots ①$$
$$Y=\frac{-1}{2t+2}\quad\cdots ②$$
①より
$$X=1-\frac{1}{2t+2}\quad\cdots ①'$$
であり，②を代入すると
$$X=1+Y$$
$$Y=X-1.$$
また，①'より，$t\neq -1$ であるから $X\neq 1$ となる。

したがって P_t が描く図形は下の通り．



図の実線部．ただし，点 1 を除く．

〔3〕

(1) $f(x)=xe^{-2x^2}$ より,

$$f'(x)=-(2x+1)(2x-1)e^{-2x^2}$$

より, 増減は次.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

これより,

極大値 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$. ($x=\frac{1}{2}$ のとき)

極小値 $f(-\frac{1}{2})=\frac{-1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$. ($x=-\frac{1}{2}$ のとき)

(2) ℓ_t の方程式は,

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

$$y-te^{-2t^2}=(1-4t^2)e^{-2t^2}(x-t)$$

であり, $A(a,0)$ を通ることより,

$$-te^{-2t^2}=(1-4t^2)e^{-2t^2}(a-t).$$

$e^{-2t^2}\neq 0$ より,

$$-t=(1-4t^2)(a-t).$$

$$4t^3-4at^2+a=0.$$

この方程式は実数係数の3次方程式であるから, ちょうど二つの実数解をもつとき, その解は実数 α, β を用いて, α, α, β のように表すことができる. 解と係数の関係により,

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta=a, & \cdots ① \\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha=0, & \cdots ② \\ \alpha^2\beta=-\frac{a}{4}. & \cdots ③ \end{cases}$$

②より,

$$\alpha(\alpha+2\beta)=0.$$

$a>0$ であるから, ③より $\alpha\neq 0$. したがって, $\alpha=-2\beta$. これと①より, $a=-3\beta$ であるから, これらを③に用いて,

$$\beta(16\beta^2-3)=0.$$

③と $a>0$ より, $\beta<0$ であるから, $\beta=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$(\alpha,\beta)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

よって, $a=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $p=-\frac{\sqrt{3}}{4}$, $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $x\geqq 0$ のとき, $f(x)\geqq 0$ ($x=0$ のときのみ等号は成り立つ) であるから, 求める面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} S&=\int_0^q xe^{-2x^2}dx \\ &=-\frac{1}{4}\int_0^q(-4xe^{-2x^2})dx \\ &=-\frac{1}{4}\left[e^{-2x^2}\right]_0^q \\ &=-\frac{1}{4}\left(e^{-2q^2}-e^0\right) \\ &=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

［4］

(1)

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx$ とおくと,

$$I_n=\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}-\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n}.$$

(2) $y=|\sin nx|$ の周期は $\frac{\pi}{n}$ であるから,

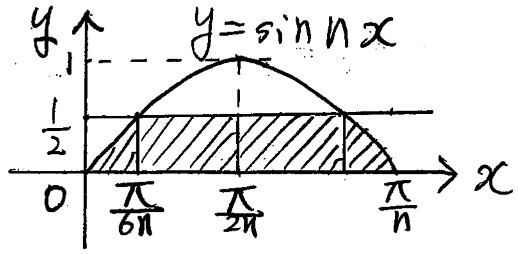
$$\int_0^{\pi}|\sin nx|\,dx$$

$$=n\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin nx|\,dx$$

$$=n\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx$$

$$=nI_n=n\cdot\frac{2}{n}=2.$$

(3) 周期性と $y=\frac{\pi}{2n}$ に関する対称性から, $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2n}$ の部分の体積を V_n とする.



$$V_n=\int_0^{\frac{\pi}{6n}}\pi\sin^2 nx\,dx$$

$$+\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\pi}{3n}$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6n}}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx+\frac{\pi^2}{12n}$$

$$=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2nx}{4n}\right]_0^{\frac{\pi}{6n}}+\frac{\pi^2}{12n}$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{12n}-\frac{1}{4n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi^2}{12n}$$

$$=\frac{\pi^2}{6n}-\frac{\sqrt{3}}{8n}\pi.$$

求める体積は,

$$2nV_n=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\pi.$$

(4) 求める体積を W とする.

$$W=\pi\int_0^{\pi}x\sin^2 nx\,dx$$

$$\frac{W}{\pi}=\int_0^{\pi}x\frac{1-\cos 2nx}{2}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\left[\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}dx$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\left[-\frac{\cos 2nx}{8n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{8n^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}.$$

よって，

$$W=\frac{\pi^3}{4}.$$

[5] (1)

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 1, 5\}$, … 並び替え $\frac{3!}{2!} = 3$ (通り)

$\{1, 2, 4\}$ … $3! = 6$ (通り)

$\{1, 3, 3\}$ … $\frac{3!}{2!} = 3$ (通り)

$\{2, 2, 3\}$ … $\frac{3!}{2!} = 3$ (通り)

よって, $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ となるような さいころの目の出方は,

$$3 + 6 + 3 + 3 = 15 \text{ (通り)}.$$

ここで さいころの目の出方は全部で

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \ (= 216) \text{ (通り)}$$

あり, これらの目の出方は同様に確からしいから, 求める確率は,

$$\frac{15}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{72}.$$

(2) $b_1 = 1$ となるのは,

(i) $a_1 = 1$ かつ, 1回目の硬貨を投げて裏が出たとき.

(ii) 1回目の硬貨を投げて表が出たとき. (a_1は何でもよい)

の2つのときがある. さいころを投げる試行と, 硬貨を投げる試行は独立しているから,

(i)の確率は $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

(ii)の確率は $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(i)と(ii)は互いに排反だから, $b_1 = 1$ となる確率は,

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

(3) $\vec{b} = (1, 1, 1)$ となる事象を A, $\vec{a} = (1, 1, 5)$ となる事象を B とすると, 求める確率は,

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \cdots ①$$

ここで, P(A)について, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$ となる確率も $b_1 = 1$ となる確率にそれぞれ等しいから, (2)より,

$$P(A) = \left(\frac{7}{12}\right)^3. \quad \cdots ②$$

次に $P(A \cap B)$ を考える.

$(a_1, b_1) = (1, 1)$ である確率は

$$\frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

$(a_2, b_2) = (1, 1)$ である確率も

$$\frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

$(a_3, b_3) = (5, 1)$ である確率は,

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

よって,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} \quad \cdots ③$$

①, ②, ③ より, 求める条件付き確率は,

$$\frac{\frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 12}}{\frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{12 \cdot 12 \cdot 12}} = \frac{4}{343}.$$

(4) $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ となる事象を C とすると, 求める確率は, (3)で設定した記号も用いて,

$$\frac{P(A \cap C)}{P(A)}. \quad \cdots ④$$

$P(A \cap C)$ について考える.

$k = 1, 2, 3$ において,

$(a_k, b_k) = (1, 1)$ となる確率 p は,

$$p = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6},$$

$(a_k, b_k) = (l, 1)$, $(l = 2, 3, 4, 5, 6)$

となる確率 q は,

$$q = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

だから,

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 1, 5\}$ のとき, 並べ替えも考えて,

$$3p^2q = \frac{3}{6\cdot 6\cdot 12}$$

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 2, 4\}$ のとき,

$$6pq^2 = \frac{6}{6\cdot 12\cdot 12}$$

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 3, 3\}$ のとき,

$$3pq^2 = \frac{3}{6\cdot 12\cdot 12}$$

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 3, 3\}$ のとき,

$$3q^3 = \frac{3}{12\cdot 12\cdot 12}$$

よって,
$$P(A\cap C) = \frac{12+12+6+3}{12\cdot 12\cdot 12} = \frac{33}{12\cdot 12\cdot 12} \quad \cdots⑤$$

②, ⑤を④に代入して, 求める条件付き確率は,

$$\frac{\dfrac{33}{12\cdot 12\cdot 12}}{\dfrac{7\cdot 7\cdot 7}{12\cdot 12\cdot 12}} = \frac{33}{343}.$$