$\boxed{1}$ (1)

$$\ell : y = kx + 1, \quad \cdots ①$$
$$C : y = x^2. \quad \cdots ②$$

①, ② より y を消去して

$$x^2 - kx - 1 = 0. \quad \cdots ③$$

このとき，③ の実数解が P, Q の x 座標であり，③ は異なる 2 つの実数解

$$x = \frac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2}$$

をもつ．よって

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2},\ \frac{k^2-k\sqrt{k^2+4}}{2}+1\right), \\ &\mathrm{Q}\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2},\ \frac{k^2+k\sqrt{k^2+4}}{2}+1\right) \end{aligned}\right\} \quad \cdots ④$$

であるから，線分 PQ の中点 M の座標は

$$\boxed{\mathrm{M}\left(\frac{k}{2},\ \frac{k^2}{2}+1\right)}. \quad \cdots(答)$$

(2) $m \perp \ell$ より m の傾きは $-\dfrac{1}{k}$ $(k>0)$.
m は M を通るので

$$m : y = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{k}{2}\right) + \frac{k^2}{2} + 1.$$
$$y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2}{2} + \frac{3}{2}. \quad \cdots ⑤$$

②, ⑤ より y を消去して

$$x^2 + \frac{1}{k}x - \frac{k^2}{2} - \frac{3}{2} = 0. \quad \cdots ⑥$$

このとき，⑥ の実数解が R, S の x 座標であり，⑥ の判別式は $\dfrac{1}{k^2} + 2k^2 + 6 > 0$ なので ⑥ は異なる 2 つの実数解をもつ．その 2 つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{k}, \quad \alpha\beta = -\frac{k^2}{2} - \frac{3}{2}. \quad \cdots ⑦$$

N は線分 RS の中点であり，さらに N は m 上にあるので，$\mathrm{N}(X,\ Y)$ とおくと ⑦ より

$$\begin{cases} X = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = -\dfrac{1}{2k}, & \cdots ⑧ \\ Y = -\dfrac{1}{k}X + \dfrac{k^2}{2} + \dfrac{3}{2}. & \cdots ⑨ \end{cases}$$

⑧ , ⑨より

$$Y = \frac{1}{2k^2} + \frac{k^2}{2} + \frac{3}{2}.$$

ここで，$k^2 > 0$ なので，相加平均・相乗平均の関係より

$$Y \geqq 2\sqrt{\frac{1}{2k^2}\cdot\frac{k^2}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

が成り立ち，左の等号が成り立つのは

$$\frac{1}{2k^2} = \frac{k^2}{2} \quad (k>0)$$

より $k=1$ のときである．

以上より，N の y 座標は

$$\boxed{k=1} \quad \cdots(答)$$

のとき最小となり，このとき ④ より

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}. \quad \cdots(答)$$

2 $f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\sin\theta+\cos\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi).$

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ より

$$t^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta.$$
$$t^2=1-\sin 2\theta.$$
$$\sin 2\theta=1-t^2.$$

以上より

$$f(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t^2)-t$$
$$=\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\frac{1}{\sqrt{2}}}. \quad \cdots(答)$$

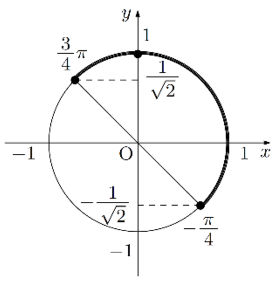
(2)　(1) より $t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと

$$f(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

一方，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ であり $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi \quad \cdots①$$

なので

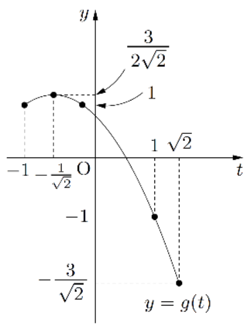


$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1.$$
$$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}.$$

ここで

$$g(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (-1\leqq t\leqq\sqrt{2})$$

とおくと，$y=g(t)$ のグラフより



● $t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $f(\theta)$ は

$$\boxed{最大値\ \frac{3}{2\sqrt{2}}} \quad \cdots(答)$$

をとり，このとき

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}.$$

① より $\theta-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{6}$ すなわち

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{12}}. \quad \cdots(答)$$

● $t=\sqrt{2}$ のとき $f(\theta)$ は

$$\boxed{最小値\ -\frac{3}{\sqrt{2}}} \quad \cdots(答)$$

をとり，このとき

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

① より $\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち

$$\boxed{\theta=\frac{3}{4}\pi}. \quad \cdots(答)$$

(3)　(1), (2) より $t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと

$$f(\theta)=a \quad \cdots②$$

は

$$g(t)=a \quad \cdots③$$

とかける．③ を満たす実数 t の値は $y=g(t)$ と $y=a$ のグラフの共有点の t 座標である．ここで

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \quad (0\leqq\theta\leqq\pi) \quad \cdots④$$

であるから，1 つの実数 t の値に対して ④ を満たす θ の個数は

$$\begin{cases} t<-1,\ \sqrt{2}<t & のとき 0 個, \\ -1\leqq t<1,\ t=\sqrt{2} & のとき 1 個, \\ 1\leqq t<\sqrt{2} & のとき 2 個 \end{cases}$$

である．よって，② を満たす θ がちょうど 2 個になるのは，$y=g(t)$ と $y=a$ のグラフの共有点が

「$1\leqq t<\sqrt{2}$ の範囲に 1 個のみで他にはない」

または

「$-1\leqq t<1,\ t=\sqrt{2}$ の範囲に 2 個のみで他にはない」

の場合があるので，(2) のグラフより求める a の範囲は

$$\boxed{-\frac{3}{\sqrt{2}}<a\leqq-1,\ 1\leqq a<\frac{3}{2\sqrt{2}}}. \quad \cdots(答)$$

$\boxed{3}$ さいころの目の出方は全部で

$$6^n \text{ 通り.}$$

(1)　X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となるのは，n 回すべて 3 または 6 の目が出て，少なくとも 1 回 3 の目が出るときである．

n 回すべて 3 または 6 の目が出るとき，目の出方は

$$2^n \text{ 通り.}$$

このうち，n 回すべて 6 の目が出る 1 通りを除けばよいので，求める確率は

$$\boxed{\frac{2^n-1}{6^n}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数のとり得る値は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

のいずれかである．

最大公約数が 1 とならないのは，最大公約数が

3 のとき，　5 のとき，　偶数のとき

のいずれかである．

最大公約数が 3 となるとき，(1) より目の出方は

$$(2^n-1) \text{ 通り.}$$

最大公約数が 5 となるのは n 回すべて 5 の目が出るときであり，目の出方は

$$1 \text{ 通り.}$$

最大公約数が偶数となるのは n 回すべて偶数の目が出るときであり，目の出方は

$$3^n \text{ 通り.}$$

以上より，求める確率は

$$1-\frac{(2^n-1)+1+3^n}{6^n}$$
$$=\boxed{1-\frac{2^n+3^n}{6^n}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

4 (1)　$C_1 : y = 2x^2$ において

$$y' = 4x$$

であり，C_1 上の点 $(t,\ 2t^2)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y = 4t(x-t) + 2t^2.$$

$$y = 4tx - 2t^2. \quad \cdots①$$

直線 ① が $C_2 : y = -x^2 + 2x - \dfrac{19}{8}$ と接するとき

$$-x^2 + 2x - \frac{19}{8} = 4tx - 2t^2$$

すなわち

$$x^2 + 2(2t-1)x - 2t^2 + \frac{19}{8} = 0 \quad \cdots②$$

が重解をもつので，② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2t-1)^2 - \left(-2t^2 + \frac{19}{8}\right) = 0.$$

$$48t^2 - 32t - 11 = 0.$$

$$(4t+1)(12t-11) = 0.$$

$$t = -\frac{1}{4},\ \frac{11}{12}.$$

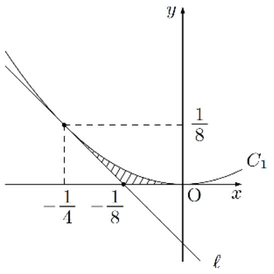
よって，求める直線の方程式は，① より

$$\boxed{y = -x - \frac{1}{8},\ y = \frac{11}{3}x - \frac{121}{72}}. \quad \cdots(答)$$

(2)　(1) の結果より

$$\ell : y = -x - \frac{1}{8}.$$

よって，C_1，x 軸および ℓ が囲む部分は次の図の斜線部である．



したがって，求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} 2x^2\,dx - \frac{1}{2} \cdot \left\{-\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right\} \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{4}}^{0} - \frac{1}{128}$$

$$= \frac{1}{96} - \frac{1}{128}$$

$$= \boxed{\frac{1}{384}}. \quad \cdots(答)$$