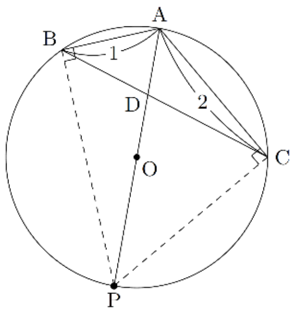
1



(1)
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 1,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 2,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{6}. \qquad \cdots ①$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\end{aligned}$$

であるから，①より

$$6 = 4 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 1.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{-\frac{1}{2}}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　線分 AP は三角形 ABC の外接円の直径であるから

$$\angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{ACP} = \frac{\pi}{2}$$

であり

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0, \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} = 0.\end{cases}$$

よって

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = 0, \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0.\end{cases}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = 0, \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\left(s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0.\end{cases}$$

よって

$$\begin{cases}s\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = 0, \\ s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 0.\end{cases}$$

① と (1) の結果より

$$\begin{cases}s - \frac{1}{2}t - 1 = 0, \\ -\frac{1}{2}s + 4t - 4 = 0.\end{cases}$$

これを解くと

$$\boxed{s = \frac{8}{5},\quad t = \frac{6}{5}}. \qquad \cdots(答)$$

(3)　(2) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{14}{5}\cdot\frac{4\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}.$$

D は線分 AP 上かつ，線分 BC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{4\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}.$$

よって，① と (1) の結果より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 &= \frac{1}{49}\left|4\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{49}\left\{16\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + 24\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 9\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right\} \\ &= \frac{1}{49}\left\{16\cdot 1 + 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\cdot 4\right\} \\ &= \frac{40}{49}.\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| > 0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$.

以上より

$$\mathrm{AD} = \boxed{\frac{2\sqrt{10}}{7}}. \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{2}$ 2点 $\left(\frac{1}{16},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{1}{9}\right)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$16x+9y=1 \qquad \cdots ①$$

である．

(1)　$16\times4+9\times(-7)=1$ と ① から

$$16(x-4)=-9(y+7). \qquad \cdots ①'$$

$x,\ y$ は整数であり，16 と 9 は互いに素なので k を整数として $x-4=9k$ とおける．このとき ①′ より

$$y+7=-16k$$

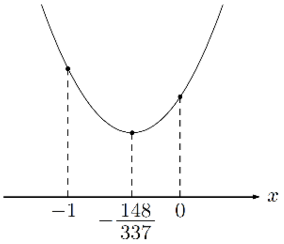
となる．
よって，ℓ 上のすべての格子点の座標は

$$\boxed{(x,\ y)=(9k+4,\ -16k-7)\ (k \text{ は整数})}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　原点 O と点 $(9k+4,\ -16k-7)$ との距離を $d(k)$ とおくと

$$\begin{aligned}\{d(k)\}^2&=(9k+4)^2+(-16k-7)^2\\&=337k^2+296k+65\\&=337\left(k+\frac{148}{337}\right)^2-\frac{148^2}{337}+65.\end{aligned}$$

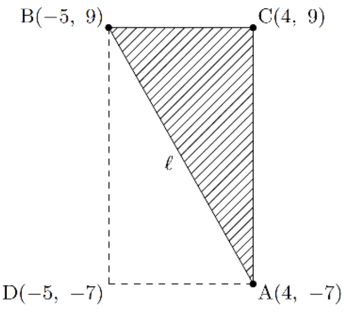
ここで $y=337\left(x+\frac{148}{337}\right)^2-\frac{148^2}{337}+65$ のグラフは
$-\frac{1}{2}<-\frac{148}{337}<0$ であることに注意すると，次のようになる．



よって，$d(k)$ が最小となるのは $k=0$ のときで，それ以外で $d(k)$ が最小となるのは $k=-1$ のときである．

$$k=0 \text{ のとき A}(4,\ -7),$$
$$k=-1 \text{ のとき B}(-5,\ 9)$$

であり，C(4, 9) である．
よって三角形 ABC は次のようになる．



D(−5, −7) として長方形 ACBD の内部および周上にある格子点の個数は

$$(4+5+1)\times(9+7+1)=170.$$

対角線 AB 上には格子点は A, B の 2 個のみであり，対称性から △ABC の内部および周上にある格子点の個数と △BAD の内部および周上にある格子点の個数は一致するから，求める個数は

$$\frac{170-2}{2}+2=\boxed{86}. \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{3}$ さいころの目の出方は全部で

$$6^n \text{ 通り．}$$

(1)　X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となるのは，n 回すべて 3 または 6 の目が出て，少なくとも 1 回 3 の目が出るときである．

n 回すべて 3 または 6 の目が出るとき，目の出方は

$$2^n \text{ 通り．}$$

このうち，n 回すべて 6 の目が出る 1 通りを除けばよいので，求める確率は

$$\boxed{\frac{2^n-1}{6^n}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数のとり得る値は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

のいずれかである．

最大公約数が 1 とならないのは，最大公約数が

3 のとき，　5 のとき，　偶数のとき

のいずれかである．

最大公約数が 3 となるとき，(1) より目の出方は

$$(2^n-1) \text{ 通り．}$$

最大公約数が 5 となるのは n 回すべて 5 の目が出るときであり，目の出方は

$$1 \text{ 通り．}$$

最大公約数が偶数となるのは n 回すべて偶数の目が出るときであり，目の出方は

$$3^n \text{ 通り．}$$

以上より，求める確率は

$$1-\frac{(2^n-1)+1+3^n}{6^n}=\boxed{\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)　X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最小公倍数が 20 となるのは n 回すべて 1，2，4，5 のいずれかの目が出て，4 の目と 5 の目が少なくとも 1 回ずつ出るときである．

n 回すべて 1，2，4，5 のいずれかの目が出るとき，目の出方は

$$4^n \text{ 通り．}$$

このうち

4 の目が出ない目の出方は 3^n 通り，
5 の目が出ない目の出方は 3^n 通り，
4 の目も 5 の目も出ない目の出方は 2^n 通り．

以上より，求める確率は

$$\frac{4^n-(3^n+3^n-2^n)}{6^n}=\boxed{\frac{4^n-2\cdot 3^n+2^n}{6^n}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$,　$a_1=\alpha\ (0<\alpha<1)$,　$a_{n+1}=f(a_n)$.

(1)　まず，すべての自然数 n に対して

$$0<a_n<1 \qquad \cdots（＊）$$

となることを数学的帰納法で示す．

(ｉ) $n=1$ のとき $a_1=\alpha$, $0<\alpha<1$ より（＊）は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき（＊）が成り立つと仮定すると

$$0<a_k<1.$$

このとき，$0<\dfrac{\pi a_k}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$0<a_{k+1}=\sin\frac{\pi a_k}{2}<1$$

となり，$n=k+1$ のときも（＊）は成り立つ．

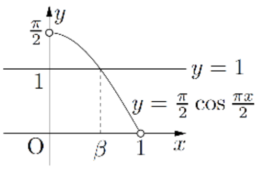
(ｉ), (ii) より，すべての自然数 n に対して（＊）は成り立つ．

次に，$a_{n+1}>a_n$ を示す．

$$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n.\quad (0<a_n<1)$$

ここで，$g(x)=f(x)-x\quad(0<x<1)$ とおくと

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-1.$$



$f'(x)=1\ (0<x<1)$ を満たす x を β とおくと，$0<x<1$ における $g(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	β	$\cdots$	(1)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	(0)	↗		↘	(0)

よって，$0<x<1$ において $g(x)>0$ が成り立つので $f(a_n)-a_n>0$ すなわち $a_{n+1}>a_n$ が成り立つ．

（証明終り）

(2)
$$b_n=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\frac{1-f(a_n)}{1-a_n}.$$

ここで，$u(x)=\dfrac{1-f(x)}{1-x}\ (0<x<1)$ とおくと $b_n=u(a_n)$ となり，$u(a_{n+1})<u(a_n)$ を示せばよい．

$$u'(x)=\frac{-f'(x)\cdot(1-x)+1-f(x)}{(1-x)^2}.$$

$v(x)=-f'(x)\cdot(1-x)+1-f(x)\ (0<x<1)$ とおくと

$$v'(x)=-f''(x)\cdot(1-x).$$

$f''(x)=-\dfrac{\pi^2}{4}\sin\dfrac{\pi x}{2}<0\ (0<x<1)$ なので

$$v'(x)>0.$$

これより，$0<x<1$ において $v(x)$ は単調増加であり，これと $v(1)=0+1-\sin\dfrac{\pi}{2}=0$ より

$$v(x)<0.\quad(0<x<1)$$

よって，$0<x<1$ において $u'(x)<0$ であるから $u(x)$ は単調減少である．(1) より $0<a_n<a_{n+1}<1$ が成り立つので

$$u(a_{n+1})<u(a_n)$$

すなわち $b_{n+1}<b_n$ が成り立つ．

（証明終り）

(3)　(2) よりすべての自然数 n に対して $b_n \leqq b_1$ であるから

$$\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}\leqq b_1.$$

ここで，$0<a_n<1$ より $1-a_n>0$ であるから

$$0<1-a_{n+1}\leqq b_1(1-a_n).$$

これを繰り返し用いると

$$0<1-a_n\leqq (b_1)^{n-1}(1-a_1).$$

ここで，$0<a_1<a_2<1$ より $0<b_1=\dfrac{1-a_2}{1-a_1}<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(b_1)^{n-1}(1-a_1)=0$$

より

$$\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{1}. \qquad \cdots(答)$$

さらに $c_n=1-a_n$ とおくと

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{1-\sin\dfrac{\pi a_n}{2}}{1-a_n}\\
&=\frac{1-\sin\dfrac{\pi(1-c_n)}{2}}{c_n}\\
&=\frac{1-\cos\dfrac{\pi c_n}{2}}{c_n}\\
&=\frac{2\sin^2\dfrac{\pi c_n}{4}}{c_n}\\
&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi c_n}{4}}{\dfrac{\pi c_n}{4}}\cdot\sin\frac{\pi c_n}{4}
\end{aligned}$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{\pi}{2}\cdot1\cdot0=\boxed{0}. \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{5}$

$$0 < f(x) < 1, \qquad \cdots①$$

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = ax, \quad (a>0) \qquad \cdots②$$

$$f(0) = \frac{1}{3}. \qquad \cdots③$$

(1)　② の左辺において $f(t) = u$ とおくと ③ より

$$f'(t)\,dt = du,$$

t	$0 \ \rightarrow \ x$
u	$\frac{1}{3} \ \rightarrow \ f(x)$

なので

$$\begin{aligned}(②\text{ の左辺}) &= \int_{\frac{1}{3}}^{f(x)} \frac{1}{(1-u)u}\,du \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{f(x)} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{u}\right) du \\ &= \Big[-\log|1-u| + \log|u|\Big]_{\frac{1}{3}}^{f(x)} \\ &= -\log|1-f(x)| + \log|f(x)| + \log 2.\end{aligned}$$

ここで ① より $f(x) > 0$，$1 - f(x) > 0$ だから，② は

$$\log\frac{2f(x)}{1-f(x)} = ax$$

となる．これより

$$\frac{2f(x)}{1-f(x)} = e^{ax}.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{ax}}{2+e^{ax}}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x) > 0$ より，求める面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{ax}}{2+e^{ax}}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{a}\log(2+e^{ax})\right]_0^1 \qquad (a>0) \\ &= \boxed{\frac{1}{a}\{\log(2+e^a) - \log 3\}}. \qquad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}S(a) &= \frac{1}{a}\log\frac{2+e^a}{3} \\ &= \frac{\log\left(1 + \frac{e^a-1}{3}\right)}{\frac{e^a-1}{3}} \cdot \frac{e^a-1}{a} \cdot \frac{1}{3}\end{aligned}$$

であり，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{e^a-1}{3} = 0$ であるから

$$\lim_{a\to+0} S(a) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}. \qquad \cdots(\text{答})$$