$\boxed{1}$ (1)

$$f'(x) = 6x^2 - 2(6+3\sin a)x + 12\sin a$$
$$= 6\{x^2 - (2+\sin a)x + 2\sin a\}$$
$$= 6(x-2)(x-\sin a)$$

であるから，$\sin a < 2$ より

$f(x)$ の増減は次の表のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $\sin a$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ |

よって $f(x)$ はただ1つの極大値をもち，その値は

$$M(a)$$
$$= f(\sin a)$$
$$= 2\sin^3 a - (6+3\sin a)\sin^2 a + 12\sin^2 a + \sin^3 a + 6\sin a + 5$$
$$= 6\sin^2 a + 6\sin a + 5.$$

…(答)

(2) $t = \sin a$ とおくと

$$M(a) = 6t^2 + 6t + 5$$

となり，$0 \leqq a < 2\pi$ より

$t$ のとりうる値の範囲は

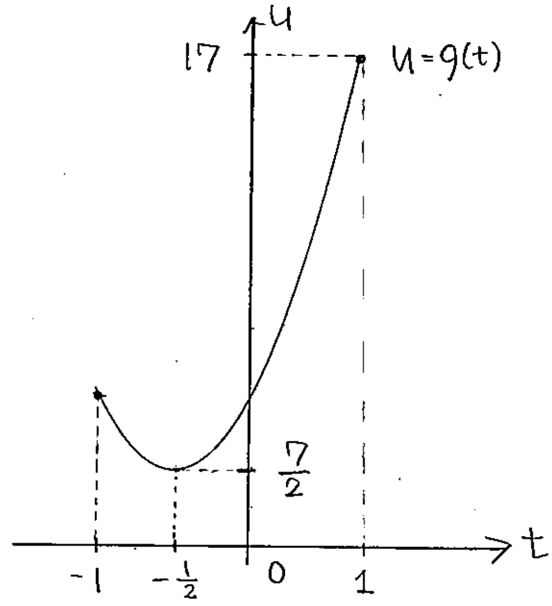
$$-1 \leqq t \leqq 1$$

である．

$g(t) = 6t^2 + 6t + 5$ とおくと

$$g(t) = 6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$$

より，$-1 \leqq t \leqq 1$ での $u = g(t)$ のグラフは次の図のようになる。




よって．グラフより $g(t)$ は $t=1$ のとき最大値 $17$ をとり，$t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{7}{2}$ をとる．

$t=1$ のとき $\sin a = 1$ なので

$0 \leqq a < 2\pi$ より $a = \frac{\pi}{2}$．

$t = -\frac{1}{2}$ のとき $\sin a = -\frac{1}{2}$ なので

$0 \leqq a < 2\pi$ より $a = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$.

したがって，$M(a)$ は

$a = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $17$，

$a = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ のとき最小値 $\frac{7}{2}$ をとる．…(答)

2

(1) さいころを2回投げたあとにQがAに位置するようなQの移動は，

$A \to B \to A$ …①

$A \to C \to A$ …②

$A \to A \to A$ …③

の3通りあり，①〜③それぞれの確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^2$，$\left(\frac{1}{6}\right)^2$，$\left(\frac{2}{3}\right)^2$である．①〜③は排反であるから，

$$P_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}. \quad \cdots (答)$$

(2) さいころを$n$回投げたあとにQがAに位置するときは，$\frac{2}{3}$の確率で$n+1$回投げたあとにもAに位置し，$n$回投げたあとにBかCに位置するときは，$\frac{1}{6}$の確率で$n+1$回投げたあとにAに位置する．

さいころを$n$回投げたあとにQがBかCに位置する確率は$1-P_n$であるから，

$$P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{6}(1-P_n)$$

$$= \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{6}. \quad \cdots (答)$$

(3) (2)より，

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}P_n - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right).$$

$P_1 = \frac{2}{3}$であるから，数列$\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$は初項$\frac{1}{3}$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列で，

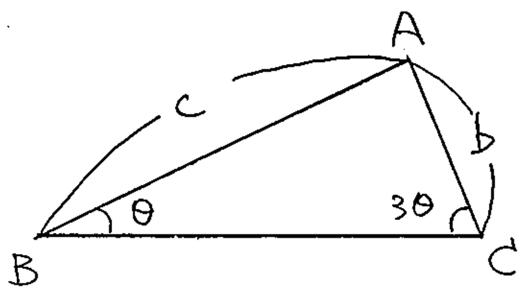
$$P_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

よって，

$$P_n = \frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}. \quad \cdots (答)$$

3

$\angle ABC=\theta$ とおくと，条件より，
$\angle ACB=3\theta$.




よって，三角形ABCに正弦定理を用いると，

$$\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin 3\theta}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\cdot b \\ &= \frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}\cdot b \\ &= (3-4\sin^2\theta)b \\ &= 3b-(4\sin^2\theta)b \\ &< 3b. \end{aligned}$$

（証明終り）