1　$f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}\ (x\geqq 0)$

(1)
$$\log f(x)=\log (x+1)^{\frac{1}{x+1}}$$
$$=\frac{1}{x+1}\log(x+1). \cdots ①$$

両辺を x について微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-1}{(x+1)^2}\log(x+1)+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}.$$

よって,

$$f'(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}. \cdots ②$$

$f(x)$の増減を調べると次表のようになる.

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

したがって, $f(x)$の最大値は,

$$f(e-1)=e^{\frac{1}{e}}. \cdots (答)$$

(2) ①より

$$\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1}$$
$$=0 \ (問題文より)$$

であるから, 指数関数の連続性より

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{\log f(x)}=1. \cdots ③$$

$\cdots$(答)

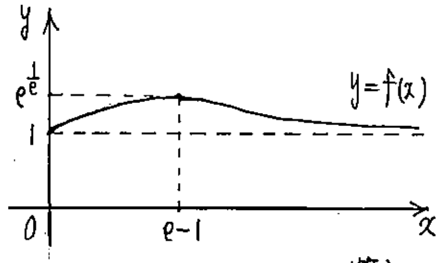
また, ②より

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{\log(x+1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=0. \ (③と問題文より)$$

$\cdots$(答)

(3) (1)の表と(2), および $f(0)=1$ より

$y=f(x)$のグラフの概形は次図のようになる.



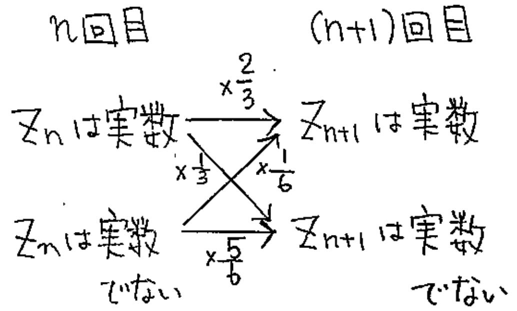
$\cdots$(答)

$\boxed{2}$

$X_k=1, -1, 0$ となる確率は，それぞれ $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$ である．

また，$\arg z_n=\frac{\pi}{3}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ であるから，z_n が実数であることと $X_1+X_2+\cdots+X_n$ が3の倍数であることは同値である．

したがって，下の遷移図を得る．



(1) z_1 が実数である確率は $\frac{2}{3}$，z_1 が実数でない確率は $\frac{1}{3}$ であるから，遷移図より求める確率は，

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{2}. \quad \cdots(答)$$

(2) 遷移図より，求める確率は，

$$(z_1\text{が実数でない確率})\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}. \quad \cdots(答)$$

（$n=1$のときも成立）

(3) $p_1=(z_1\text{が実数である確率})=\frac{2}{3}$.

遷移図より，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}(1-p_n)$$
$$=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{6}.$$

これより，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

であるから，

$$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}. \quad \cdots(答)$$

$\left(p_1=\frac{2}{3}\text{より}\right)$

また，このとき，

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}. \quad \cdots(答)$$

3

三角形ABCの外接円の半径をRとすると，正弦定理から，

$$\frac{c}{\sin\angle ACB}=\frac{b}{\sin\angle ABC}=2R$$

が成り立つ．$\angle ABC=B$ とおくと，$\angle ACB=n\angle ABC$ のとき，

$$c=2R\sin(nB),\ b=2R\sin B.$$

このとき，

$$nb-c=2R\{n\sin B-\sin(nB)\}$$

が成り立つので，$c<nb$ を示すには，

$$n\sin B-\sin(nB)>0 \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを示せばよい．

ここで，三角形ABCの内角の和が π であることから，

$$\angle ABC+\angle ACB=\pi-\angle BAC<\pi.$$

$$B+nB<\pi.$$

$$(0<)\ B<\frac{\pi}{n+1}.$$

さて，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=n\sin x-\sin(nx)$$

で定めると，

$$f'(x)=n\cos x-n\cos(nx)$$

$$=n\{\cos x-\cos(nx)\}$$

となる．

すると，$0<x<\dfrac{\pi}{n+1}$ のとき，

$$0<x<nx<\pi$$

であるから，

$$\cos x>\cos(nx)$$

が成り立つ．

これより，$0<x<\dfrac{\pi}{n+1}$ において，つねに $f'(x)>0$ である．

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{n+1}$ において，$f(x)$ は単調に増加する．

したがって，

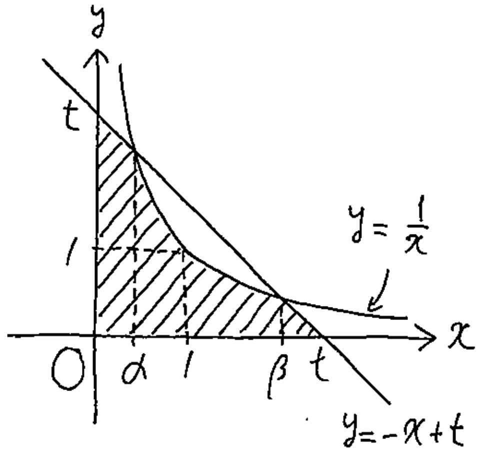
$$f(B)>f(0)=0$$

つまり，$(*)$ が成り立つことが示され，証明が完了する．

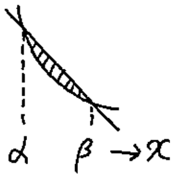
（証明終り）

$\boxed{4}$

$t\to\infty$ のときを考えるので $t>2$ として考える。



このとき，連立不等式の表す領域は上図のとおりであり，交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とするとその面積は

$S(t) =$  $-$ 

$$= \frac{1}{2}t\cdot t - \int_\alpha^\beta \left(-x+t-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - \left[-\frac{1}{2}x^2+tx-\log x\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)-t(\beta-\alpha)+\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

これより，

$$S(t)-2\log t$$

$$= \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)-t(\beta-\alpha)+\log\frac{\beta}{\alpha}-2\log t.$$

$$\cdots\cdots ①$$

ここで，α, β は方程式

$$\frac{1}{x}=-x+t$$

つまり $x^2-tx+1=0$

の2解であり，

$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2},\quad \beta=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$$

だから

$$\beta-\alpha=\sqrt{t^2-4},$$

$$\beta^2-\alpha^2=(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=t\sqrt{t^2-4},$$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{t-\sqrt{t^2-4}}=\frac{(t+\sqrt{t^2-4})^2}{4}=\frac{t^2}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)^2.$$

①に代入して

$$S(t)-2\log t$$

$$= \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}-t\sqrt{t^2-4}$$
$$\quad +\log\left\{\frac{t^2}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)^2\right\}-\log t^2$$

$$= \frac{1}{2}t\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)+\log\left\{\frac{t^2}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)^2\cdot\frac{1}{t^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}t\cdot\frac{4}{t+\sqrt{t^2-4}}+\log\left\{\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}+\log\left\{\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)^2\right\}$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{2}{1+1}+\log\left\{\frac{1}{4}(1+1)^2\right\}=1.$$

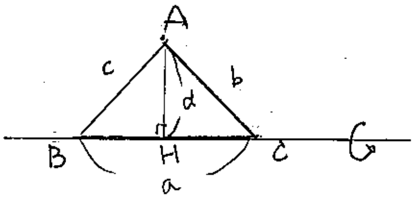
よって，

$$\lim_{t\to\infty}\left(S(t)-2\log t\right)=1.\ \cdots(\text{答})$$

5

(1) $AB=c$ とする．点 A から直線 BC に下ろした垂線の足を H とし，$AH=d$ とする．

(i) H が線分 BC 上にあるとき

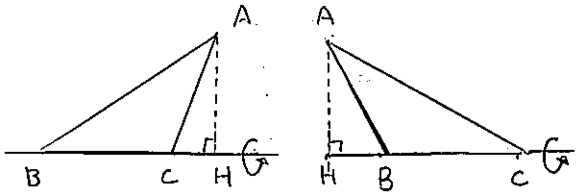


$$V=\frac{1}{3}\pi d^2\cdot BH+\frac{1}{3}\pi d^2\cdot HC$$

$$=\frac{1}{3}\pi d^2(BH+HC)$$

$$=\frac{1}{3}\pi a d^2.$$

(ii) H が線分 BC 上にないとき



$$V=\frac{1}{3}\pi d^2|BH-CH|$$

$$=\frac{1}{3}\pi a d^2.$$

(i)，(ii) いずれの場合も

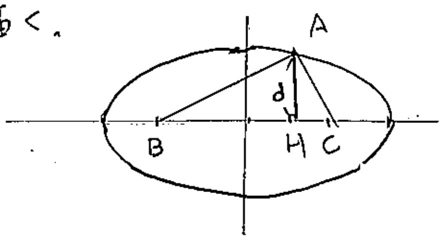
$$V=\frac{1}{3}\pi a d^2. \quad \cdots ①$$

よって，d が最大となるのは $b=c$ のときであることを示せばよい．

a を固定したとき，

$$AB+AC=2-a \quad (\text{一定})$$

であり，点 A は B，C を焦点とし長軸の長さが $2-a$ の楕円を描く．



d が最大となるのは A が短軸の端点の場合である．このとき H は線分 BC の中点であり，$b=c$ である．よって V が最大となるのは三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．

(証明終り)

(2) (1) より $b=c$ のときを考えれば十分である．三角形の成立条件より

$$|b-c|<a<b+c$$

$b=c$，$b+c=2-a$ より

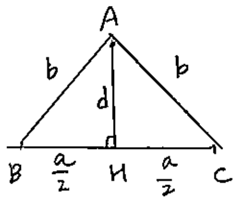
$$0<a<1,\qquad b=1-\frac{a}{2}.$$

このとき

$$d^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$$

$$=1-a.$$



① より

$$V=\frac{\pi}{3}a(1-a)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$$

$$(0<a<1).$$

よって

V の最大値は $\dfrac{\pi}{12}$，

このとき $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{4}$． …（答）