I

(1) n 回目に 3 の目が出て，3 の目が出た回数がちょうど 3 回となるのは，1 回目から $n-1$ 回目に 3 の目がちょうど 2 回出て，n 回目に 3 の目が出る場合であるから，その確率は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{6}\overset{ア}{=}\boxed{\frac{5^{n-3}(n-1)(n-2)}{2\cdot6^n}}.$$

n 回目までに出た目の積が偶数であるのは，n 回目までに少なくとも 1 回偶数の目が出た場合である．これの余事象は n 回とも奇数の目が出ることであるから，求める確率は

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^n\overset{イ}{=}\boxed{1-\frac{1}{2^n}}.$$

また，n 回目までに出た目の積が 4 の倍数であることの余事象は，次の (i) または (ii) である．

(i) n 回とも奇数の目が出る．

(ii) 1 回だけ 2 または 6 の目が出て他は奇数の目が出る．

(i), (ii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\right\}\overset{ウ}{=}\boxed{1-\frac{2n+3}{3\cdot2^n}}.$$

n 回目までに出た目の最大値が 4 であるのは，出た目が n 回とも 4 以下であり，かつ，少なくとも 1 回は 4 の目が出た場合である．

これは，出た目が「n 回とも 4 以下」である場合から，「n 回とも 3 以下」である場合を除いたものであるから，求める確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n\overset{エ}{=}\boxed{\frac{4^n-3^n}{6^n}}.$$

n 回目までに出た目の最大値を M，最小値を m とするとき，$M-m=3$ となる $(m,\ M)$ の組は

$$(m,\ M)=(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6).$$

$(m,\ M)=(1,\ 4)$ の場合に関して，

- 事象 A：出た目が n 回とも 1 以上 4 以下
- 事象 B：出た目が n 回とも 1 以上 3 以下
- 事象 C：出た目が n 回とも 2 以上 4 以下

とすると，$(m,\ M)=(1,\ 4)$ となる事象は，A から $B\cup C$ を除いたものに相当するから，その確率は

$$\begin{aligned}&P(A)-P(B\cup C)\\&=P(A)-\{P(B)+P(C)-P(B\cap C)\}\\&=\left(\frac{4}{6}\right)^n-2\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n.\end{aligned}$$

$(m,\ M)=(2,\ 5),\ (3,\ 6)$ のときも同様であるから，求める確率は

$$3\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n-2\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}\overset{オ}{=}\boxed{\frac{4^n-2\cdot3^n+2^n}{2\cdot6^{n-1}}}.$$

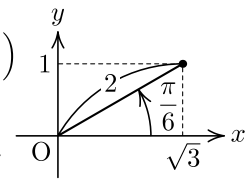
(2) $\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}\,i}=\dfrac{2\sqrt{2}(3+\sqrt{3}\,i)}{3^2+(-\sqrt{3}\,)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}+i)$

であり，右図より

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから，

$$\alpha=\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$



よって，α の偏角は $\overset{\text{カ}}{\boxed{\dfrac{\pi}{6}}}$ である.

$$z_{n+1}=\alpha z_n+z_1$$

のとき，

$$\gamma=\alpha\gamma+z_1 \quad \text{すなわち} \quad \gamma=\frac{z_1}{1-\alpha}$$

である γ を用いると，

$$z_{n+1}-\gamma=\alpha(z_n-\gamma) \qquad \cdots(*)$$

であるから，数列 $\{z_n-\gamma\}$ は初項 $z_1-\gamma$，公比 α の等比数列である．したがって，

$$z_n-\gamma=(z_1-\gamma)\alpha^{n-1}.$$

$$z_n=\alpha^{n-1}(z_1-\gamma)+\gamma.$$

ここで，

$$1-\alpha=1-\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}+i)=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)-i}{\sqrt{6}},$$

$$z_1=\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\,)i=\sqrt{2}\{1+(\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)i\}$$

であるから，

$$z_1=2\sqrt{3}\,i(1-\alpha) \quad \text{すなわち} \quad \gamma=\overset{\text{キ}}{\boxed{2\sqrt{3}}}\,i.$$

$(*)$ および α の極形式より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}_{n+1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CP}_n}$ を $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ 倍して $\dfrac{\pi}{6}$ 回転したのものであるから，

$$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{CP}_{n+1}=\frac{\pi}{6},\quad \mathrm{CP}_{n+1}=\frac{2}{\sqrt{6}}\mathrm{CP}_n.$$

$$\mathrm{CP}_1=|\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i|=\sqrt{(\sqrt{2}\,)^2+(-\sqrt{6}\,)^2}=2\sqrt{2}$$

であるから，

$$\mathrm{CP}_2=\frac{2}{\sqrt{6}}\mathrm{CP}_1=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

よって，

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{CP}_1\cdot\mathrm{CP}_2\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\overset{\text{ク}}{\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}}.$$

さらに，三角形 $\mathrm{CP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ と三角形 $\mathrm{CP}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ は，2 辺の比となす角が等しいから相似であり，相似比は $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ であるから，

$$S_{n+1}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2S_n=\frac{2}{3}S_n.$$

よって，数列 $\{S_n\}$ は，初項 $S_1=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$S_n=\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\overset{\text{ケ}}{\boxed{\sqrt{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n}}.$$

次に，

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)S_k=\sqrt{6}\sum_{k=1}^{n}(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

に関して，$r=\dfrac{2}{3}$，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)r^k$ とおくと，

$$\begin{array}{rrrrrr}
T_n= & 2r & +3r^2 & +\cdots & +(n+1)r^n & \\
-)\quad rT_n= & & 2r^2 & +\cdots & +nr^n & +(n+1)r^{n+1} \\ \hline
(1-r)T_n= & 2r & +r^2 & +\cdots & +r^n & -(n+1)r^{n+1}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}T_n&=r+(r+r^2+\cdots+r^n)-(n+1)r^{n+1}\\
&=r+\frac{r(1-r^n)}{1-r}-(n+1)r^{n+1}\\
&=\frac{2}{3}+3(r-r^{n+1})-(n+1)r^{n+1}\\
&=\frac{8}{3}-(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$T_n=8-2(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}T_n=8 \quad (\text{ 下記の (注) 参照 })$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)S_k=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6}T_n=\overset{\text{コ}}{\boxed{8\sqrt{6}}}.$$

(注) 二項定理より，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}\right)^n&=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n\\
&=1+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&\geqq 1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}>\frac{n^2}{8}\ (>0)
\end{aligned}$$

よって，

$$0<\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{8}{n^2}$$

であるから，

$$0<(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n<8\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

したがって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n=0.$$

II

(1) 点 P は線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\,1-t,\ 2t,\ 0\,)\,.$$

よって，P の座標は

$$\boldsymbol{(\,1-t,\ 2t,\ 0\,)}\,. \qquad \cdots(答)$$

(2) 点 R は線分 BC 上の点であるから，(1) と同様に考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(\,1-r,\ 2r,\ 0\,)\quad(\,0\leqq r\leqq 1\,)$$

とおける．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\,1-r,\ 2r,\ -1\,)\,.$$

これが

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\,-1,\ 2,\ 0\,)$$

に垂直であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-1(1-r)+2\cdot 2r+0\cdot(-1)=0\,.$$

$$r=\frac{1}{5}\quad(\,0\leqq r\leqq 1\ を満たす\,)\,.$$

よって，R の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)}\,. \qquad \cdots(答)$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{5}(\,4,\ 2,\ -5\,)$$

となるから，

$$\mathrm{AR}=\frac{1}{5}\sqrt{4^2+2^2+(-5)^2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{5}}\,. \qquad \cdots(答)$$

(3) (2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{ER}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{5}(\,4-5p,\ 2-5q,\ 0\,)$$

であり，これが $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に垂直であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ER}}=\frac{1}{5}\{-1(4-5p)+2(2-5q)+0\cdot 0\}=0\,.$$

よって，

$$p=2q\,,\quad \overrightarrow{\mathrm{ER}}=\frac{2-5q}{5}(\,2,\ 1,\ 0\,)\,.$$

一方，ER = AR より，

$$\frac{|2-5q|}{5}\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\,.$$

$$q=\frac{2\pm 3}{5}\,.$$

これと $q<0$ より，

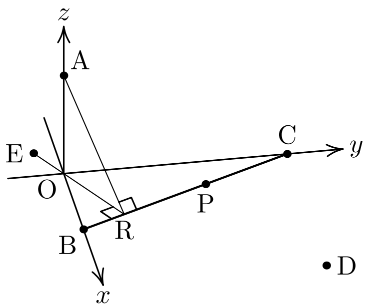
$$q=-\frac{1}{5}\,,\quad p=-\frac{2}{5}$$

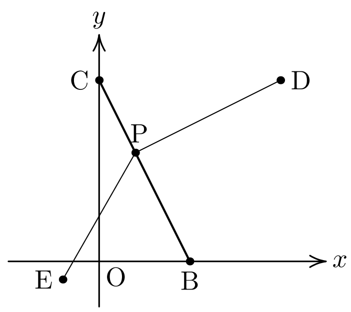
であるから，E の座標は

$$\boldsymbol{\left(-\frac{2}{5},\ -\frac{1}{5},\ 0\right)}\,. \qquad \cdots(答)$$

(4) AR ⊥ BC , ER ⊥ BC , AR = ER より，線分 BC 上の任意の点 P に対し

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{AR}^2+\mathrm{PR}^2=\mathrm{ER}^2+\mathrm{PR}^2=\mathrm{EP}^2\,.$$





よって，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PD}=\mathrm{EP}+\mathrm{PD}\,.$$

一方，xy 平面上で D と E は直線 BC に関して反対側にあるから，

$$\mathrm{EP}+\mathrm{PD}\geqq\mathrm{DE}$$

であり，等号は P が線分 BC と線分 DE の交点に一致するとき成立する．

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{1}{5}(\,12,\ 11,\ 0\,)$$

であるから，xy 平面上で直線 DE の傾きは $\dfrac{11}{12}$ であり，直線 DE の方程式は

$$y-2=\frac{11}{12}(x-2)\ かつ\ z=0\,.$$

P$(\,1-t,\ 2t,\ 0\,)$ がこの直線上にあるとき

$$2t-2=\frac{11}{12}(-t-1)\,.$$

$$t=\frac{13}{35}\quad(\,0<t<1\ を満たす\,)\,.$$

よって，AP + PD を最小にする P の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{22}{35},\ \frac{26}{35},\ 0\right)} \qquad \cdots(答)$$

であり，最小値は線分 DE の長さ，すなわち

$$\frac{1}{5}\sqrt{12^2+11^2+0^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{265}}{5}}\,. \qquad \cdots(答)$$

III

$$3a_{n+1} = S_n(1-2S_{n+1})+1 . \quad \cdots①$$

(1) $$S_1 = a_1 = 2 , \quad S_2 = a_1 + a_2 = a_2 + 2$$

より，① で $n=1$ とすると，

$$3a_2 = S_1(1-2S_2)+1 .$$

$$3a_2 = 3 - 4(a_2+2) .$$

$$a_2 = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} , \quad S_2 = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}} . \quad \cdots(答)$$

(2) $n \geqq 1$ において $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから，これを ① に代入して，

$$3(S_{n+1}-S_n) = S_n(1-2S_{n+1})+1 .$$

$$(2S_n+3)S_{n+1} = 4S_n+1 . \quad \cdots②$$

よって，(**(注 1)** 参照)

$$S_{n+1} = \frac{4S_n+1}{2S_n+3} \quad より \quad f(x) = \frac{\boldsymbol{4x+1}}{\boldsymbol{2x+3}} . \cdots(答)$$

(3) (2) より，$g(x) = \dfrac{x+1}{\beta x+1}$ に対して，

$$f(g(x)) = \frac{4g(x)+1}{2g(x)+3} = \frac{4(x+1)+(\beta x+1)}{2(x+1)+3(\beta x+1)}$$
$$= \frac{(4+\beta)x+5}{(2+3\beta)x+5} ,$$

$$g(rx) = \frac{rx+1}{\beta rx+1} .$$

$\beta = -\dfrac{2}{3}$ または 0 のとき，$f(g(x))$，$g(rx)$ の一方のみが 1 次関数となり，これらは等しくならないから，以下 $\beta \neq -\dfrac{2}{3}$，0 で考える．このとき，$y=f(g(x))$ と $y=g(rx)$ の漸近線を比較して，

$$-\frac{5}{2+3\beta} = -\frac{1}{\beta r} \quad かつ \quad \frac{4+\beta}{2+3\beta} = \frac{1}{\beta} .$$

$$5\beta r = 2+3\beta \quad かつ \quad \beta(4+\beta) = 2+3\beta .$$

$$r = \frac{2+3\beta}{5\beta} \quad かつ \quad (\beta-1)(\beta+2) = 0 .$$

$\beta \neq 1$ より，$\beta = -2$， $r = \dfrac{2}{5}$.

逆にこのとき，

$$f(g(x)) = \frac{2x+5}{-4x+5} ,$$

$$g(rx) = \frac{\frac{2}{5}x+1}{-\frac{4}{5}x+1} = \frac{2x+5}{-4x+5}$$

となり，確かに $f(g(x)) = g(rx)$ (**(注 2)** 参照) が成り立つから，

$$\beta = \boldsymbol{-2} , \quad r = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} . \quad \cdots(答)$$

(4) $S_{n+1} = f(S_n)$ であるから，(3) より

$$g(T_{n+1}) = f(g(T_n)) = g(rT_n) .$$

ここで，

$$g(x) = \frac{x+1}{-2x+1} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$$

より，一般に $g(a) = g(b)$ となるのは $a = b$ のときに限るから，

$$T_{n+1} = rT_n = \frac{2}{5}T_n .$$

また，$g(T_1) = S_1 = 2$ であるから，

$$\frac{T_1+1}{-2T_1+1} = 2 \quad より \quad T_1 = \frac{1}{5} .$$

よって，数列 $\{T_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{5}$，公比 $\dfrac{2}{5}$ の等比数列であるから，

$$T_n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)^{\boldsymbol{n-1}} . \quad \cdots(答)$$

(5) $n \to \infty$ の極限を考えるから $n \geqq 2$ としてよく，このとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = g(T_n) - g(T_{n-1})$$
$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2T_n-1} - \frac{1}{2T_{n-1}-1}\right)$$
$$= \frac{3(T_n - T_{n-1})}{(2T_n-1)(2T_{n-1}-1)}$$
$$= \frac{-9T_n}{2(2T_n-1)(2T_{n-1}-1)} .$$

(4) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = 0$ であることも考慮すると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-9}{2(2T_n-1)(2T_{n-1}-1)}$$
$$= -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} . \quad \cdots(答)$$

(注 1) $2S_n + 3 \neq 0$ は次のようにして示せる．

(I) $S_1 = 2 > 1$.

(II) $S_k > 1$ と仮定すると ② より

$$S_{k+1} - 1 = \frac{2(S_k-1)}{2S_k+3} > 0 \text{ よって } S_{k+1} > 1 .$$

したがって，数学的帰納法より $S_n > 1$ であるから $2S_n + 3 \neq 0$.

(注 2) $f(g(x)) = g(rx)$ は

「両辺が定義される x でつねに等しい」

と解釈して解答した．なお，左辺は

$$x \neq -\frac{1}{\beta} \text{ かつ } g(x) \neq -\frac{3}{2} \text{ すなわち } x \neq \frac{1}{2} , \frac{5}{4}$$

で定義され，右辺は $x \neq -\dfrac{1}{\beta r} = \dfrac{5}{4}$ で定義されている．

IV

(1)　$h(x)=\log x+\dfrac{1}{4x^2}$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}=\frac{2x^2-1}{2x^3}$$

であるから，$h(x)$ の $x>0$ における増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$h'(x)$	／	$-$	0	$+$
$h(x)$	／	↘	極小	↗

$\cdots$(答)

よって，極値は極小値のみあり，極小値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1-\log 2)}\ . \quad\cdots(\text{答})$$

(2)　$f(x)=\log x$ より $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから，

$y=f(x)$ 上の点 $(\,p,\ f(p)\,)$ における接線 l_p の方程式は，

$$y-\log p=\frac{1}{p}(x-p)\ .$$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{p}x+(\log p-1)}\ . \quad\cdots(\text{答})$$

(3)　l_p が $y=g(x)$ に接するとき，

$$g(x)-\left\{\frac{1}{p}x+(\log p-1)\right\}=0\ ,$$

すなわち，

$$x^2-\frac{1}{p}x+(c-\log p+1)=0 \quad\cdots①$$

が重解をもつ．

したがって，① の判別式を D とすると，

$$D=\frac{1}{p^2}-4(c-\log p+1)=0\ .$$

$$\log p+\frac{1}{4p^2}=c+1\ .$$

$$h(p)=c+1\ . \quad\cdots②$$

$p\ (>0)$ が増加すると l_p の傾きは減少するから，異なる p に対応する l_p は異なる．したがって，$y=g(x)$ に接する l_p の本数は ② を満たす正の実数 p の個数に等しく，これはさらに $y=h(p)$ のグラフと直線 $y=c+1$ の共有点の個数に等しい．

よって，c_0 は $y=h(p)$ のグラフと直線 $y=c+1$ の共有点が 1 つだけとなる c の値である．

ここで，問題文より

$$\lim_{t\to+0}(\sqrt{t}\log t)^2=\lim_{t\to+0}t(\log t)^2=0$$

であるから，

$$\lim_{t\to+0}t^2\log t=\lim_{t\to+0}(t\sqrt{t}\cdot\sqrt{t}\log t)=0\ .$$

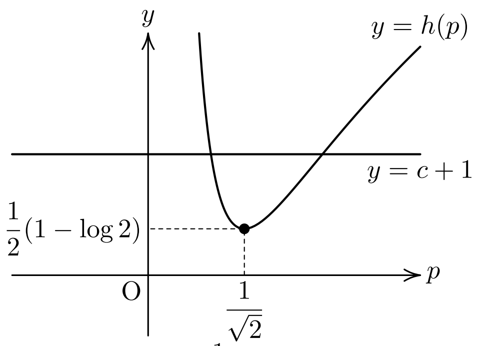
したがって，

$$\lim_{p\to+0}h(p)=\lim_{p\to+0}\frac{4p^2\log p+1}{4p^2}=\infty\ .$$

また，

$$\lim_{p\to\infty}h(p)=\lim_{p\to\infty}\left(\log p+\frac{1}{4p^2}\right)=\infty\ .$$

これと (1) の増減表をあわせると，$y=h(p)$ のグラフは次のようになる．



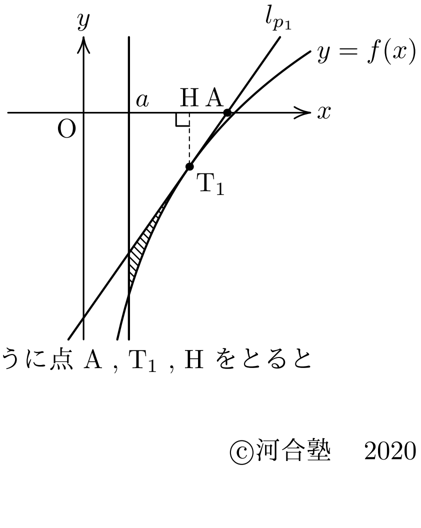
グラフより，$c_0+1=\dfrac{1}{2}(1-\log 2)$ であるから，

$$c_0=\boldsymbol{-\frac{1}{2}(1+\log 2)}\ . \quad\cdots(\text{答})$$

(4)　(3) のグラフより，$c>c_0$ のとき $y=h(p)$ のグラフと直線 $y=c+1$ は 2 交点をもち，その交点の x 座標が p_1，p_2 に相当するから，$0<p_1<p_2$ もあわせると

$$0<p_1<\frac{1}{\sqrt{2}}\ (<1\,)\ .$$

よって，$V_1(a)$ は次図斜線部を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積である．



上図のように点 A，$\mathrm{T_1}$，H をとると

$$\mathrm{A}(\,p_1(1-\log p_1),\,0\,),\quad \mathrm{T}_1(\,p_1,\,\log p_1\,)$$

であるから，三角形 $\mathrm{AT_1H}$ を x 軸のまわりに回転して得られる円錐の体積を V_0 とすると，

$$V_0=\frac{1}{3}\pi(-\log p_1)^2(-p_1\log p_1)=-\frac{\pi}{3}p_1(\log p_1)^3$$

であり，

$$V_1(a)=\int_a^{p_1}\pi(\log x)^2\,dx - V_0\left\{\left(\frac{p_1(1-\log p_1)-a}{-p_1\log p_1}\right)^3-1\right\}.$$

ここで，C を積分定数として

$$\int(\log x)^2\,dx=x(\log x)^2-\int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+C$$

であるから，

$$L(x)=x(\log x)^2-2(x\log x-x)$$

とおくと，

$$V_1(a)=\pi\{L(p_1)-L(a)\} - V_0\left\{\left(\frac{p_1(1-\log p_1)-a}{-p_1\log p_1}\right)^3-1\right\}.$$

$$\lim_{a\to+0}L(a)=\lim_{a\to+0}a(\log a)^2\left\{1-\frac{2}{\log a}+\frac{2}{(\log a)^2}\right\}$$
$$=0$$

であるから，

$$\alpha=\lim_{a\to+0}V_1(a)$$
$$=\pi L(p_1)-V_0\left\{\left(\frac{1-\log p_1}{-\log p_1}\right)^3-1\right\}$$
$$=\pi\{p_1(\log p_1)^2-2(p_1\log p_1-p_1)\}-\frac{\pi}{3}p_1\{(1-\log p_1)^3-(-\log p_1)^3\}$$
$$=\boldsymbol{\pi p_1\left(\frac{5}{3}-\log p_1\right)}.\qquad\cdots(答)$$

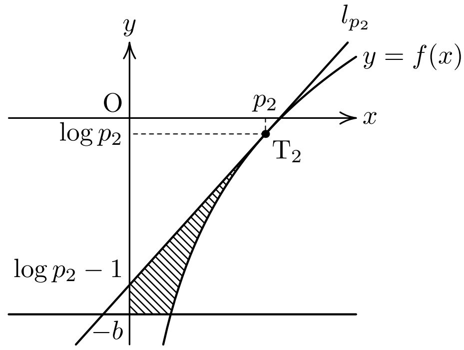
(5)　(3) のグラフより，$0<p_1<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<p_2$ であり，

$$\lim_{c\to c_0+0}p_1=\lim_{c\to c_0+0}p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.\qquad\cdots③$$

(4) と ③ より，

$$\lim_{c\to c_0+0}\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\log 2\right).\qquad\cdots④$$

次に $V_2(b)$ について考察する．$b\to\infty$ の極限を考えるから，$-b$ は l_{p_2} の y 切片 $\log p_2-1$ より小さいと考えてよい．



このとき，

$$V_2(b)=\int_{-b}^{\log p_2}\pi(e^y)^2\,dy-\frac{1}{3}\pi{p_2}^2\cdot 1$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_{-b}^{\log p_2}-\frac{\pi}{3}{p_2}^2$$
$$=\frac{\pi}{2}({p_2}^2-e^{-2b})-\frac{\pi}{3}{p_2}^2$$
$$=\frac{\pi}{6}({p_2}^2-3e^{-2b}).$$

$$\beta=\lim_{b\to\infty}V_2(b)=\frac{\pi}{6}{p_2}^2.$$

これと ③ より，

$$\lim_{c\to c_0+0}\beta=\frac{\pi}{12}.\qquad\cdots⑤$$

④，⑤ より，

$$\lim_{c\to c_0+0}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\log 2\right)\cdot\frac{12}{\pi}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}(10+3\log 2)}.\qquad\cdots(答)$$