Ⅰ

(1) $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=6x-2$ …①

$f(0)=a,\ f(1)=b$ …②

$F(x)=f(x+1)-f(x)$ とすると ① は

$F(x)-F(x-1)=6x-2$ …③

と表せる。

$f(x)$ が ① を満たすとき，$f(x)$ は定数ではない。また $f(x)$ の次数を $n\ (n\geqq 1)$ とすると $F(x)=f(x+1)-f(x)$ の次数は $n-1$ である。(注)

同様に，$F(x)$ が ③ をみたすとき，$F(x)$ は2次式であり，

$n-1=2$ より $n=3$。

$f(x)$ の次数は $\boxed{3}$ ア である。

$F(x)=px^2+qx+r\ (p\neq 0)$ とおくと

$F(x)-F(x-1)$

$=p\{x^2-(x-1)^2\}+q\{x-(x-1)\}$

$=2px+(-p+q)$。

よって ③ より $2p=6,\ -p+q=-2$。

すなわち $p=3,\ q=1$。

また ② より $F(0)=b-a$，$r=b-a$。

よって

$F(x)=\boxed{3x^2+x+b-a}$ イ …④

$f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D\ (A\neq 0)$

とおくと

$f(x+1)-f(x)$

$=A\{(x+1)^3-x^3\}+B\{(x+1)^2-x^2\}$
$+C\{(x+1)-x\}$

$=3Ax^2+(3A+2B)x+A+B+C$

よって ④ より

$3A=3,\quad 3A+2B=1,$

$A+B+C=b-a$。

すなわち $A=1,\quad B=-1,\quad C=b-a$。

また，② より $D=a$。

よって $f(x)=\boxed{x^3-x^2+(b-a)x+a}$ ウ

このとき $f'(x)=3x^2-2x+(b-a)$。

$y=f(x)$ が $x=2$ で極小値 -24 をとるとき，

$$\begin{cases} f'(2)=8+b-a=0, \\ f(2)=4+2b-a=-24 \end{cases}$$

となることが必要。

このとき $a=-12,\ b=-20$ であり

$f'(x)=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$

$f(x)$ の増減表は次のようになり，$f(x)$ は $x=2$ で極小となる。

x	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $a=\boxed{-12}$ エ，$b=\boxed{-20}$ オ

(注) $f(x)$ が n 次式 $(n\geqq 1)$ のとき

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\quad (a_0\neq 0)$

と表せて

$f(x+1)-f(x)=a_0\{(x+1)^n-x^n\}$
$+a_1\{(x+1)^{n-1}-x^{n-1}\}$
$\vdots$
$+a_{n-1}\{(x+1)-x\}$

2項定理より，k が2以上の整数のとき

$(x+1)^k-x^k$

$=(x^k+{}_kC_1x^{k-1}+\cdots+{}_kC_k)-x^k$

$={}_kC_1x^{k-1}+\left(\begin{matrix}k-2\text{次以下}\\\text{の整式}\end{matrix}\right)$

よって $f(x+1)-f(x)$ の次数は $n-1$ である。

Ⅰ

(2)

引いたくじを左から一列に並べて考える．当たりくじを○，はずれくじをXで表すことにする．

k番目にくじを引く人が2本目の当たりくじを引く確率をp_kとすると，

$$p_1=p_8=p_9=p_{10}=0$$

$k=2.3.4.5.6.7$のとき

回　1　2　…　k　…　10

$\underbrace{\square}_{\substack{\text{○が1個}\\ \text{Xが}k-2\text{個}}}$ ○ $\underbrace{\square}_{\substack{\text{○が3個}\\ \text{Xが}7-k\text{個}}}$

$$p_k=\frac{{}_{k-1}C_1\cdot{}_{10-k}C_3}{{}_{10}C_5}=\frac{(k-1)\,{}_{10-k}C_3}{{}_{10}C_5}$$

$${}_{10}C_5\,p_2={}_8C_3=56$$
$${}_{10}C_5\,p_3=2\,{}_7C_3=70$$
$${}_{10}C_5\,p_4=3\,{}_6C_3=60$$
$${}_{10}C_5\,p_5=4\,{}_5C_3=40$$
$${}_{10}C_5\,p_6=5\,{}_4C_3=20$$
$${}_{10}C_5\,p_7=6\,{}_3C_3=6$$

よって，p_k $(k=1.2.\cdots.10)$が最大となるkの値は，3であり，2本目の当たりくじを引く確率が最も大きい人は$\boxed{3}^{カ}$番目にくじを引く人である．

k番目にくじを引く人が5本目の当たりくじを引く確率をq_kとすると

$$q_1=q_2=q_3=q_4=0$$

$k=5.6.7.8.9.10$のとき

回　1　2　…　k　…　10

$\underbrace{\square}_{\substack{\text{○が4個}\\ \text{Xが}k-5\text{個}}}$ ○ $\underbrace{\square}_{\substack{\text{○は0個}\\ \text{Xが}10-k\text{個}}}$

$$q_k=\frac{{}_{k-1}C_4}{{}_{10}C_5}$$

${}_4C_4<{}_5C_4<\cdots<{}_9C_4$より，

$q_5<q_6<\cdots<q_{10}$

よって，q_k $(k=1.2.\cdots.10)$が最大となるkの値は10であり，5本目の当たりくじを引く確率が最も大きい人は$\boxed{10}^{キ}$番目にくじを引く人である．

A君が当たりくじを引く確率は，

回　1　2　3　4　…　10

$\square$ ○ $\square$

○が4個，Xが5個

$$\frac{{}_9C_4}{{}_{10}C_5}=\boxed{\frac{1}{2}}^{ク}$$

B君が3本目の当たりくじを引く確率は，

回　1　2　3　…　7　…　10

$\underbrace{\square}_{\substack{\text{○が2個}\\ \text{Xが4個}}}$ ○ $\underbrace{\square}_{\substack{\text{○が2個}\\ \text{Xが1個}}}$

$$\frac{{}_6C_2\cdot{}_3C_2}{{}_{10}C_5}=\boxed{\frac{5}{28}}^{ケ}$$

A君が2本目の当たりくじを引き，かつB君が4本目の当たりくじを引く確率は，

回　1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

$\underbrace{\square}_{\substack{\text{○が1個}\\ \text{Xが1個}}}$ ○ $\underbrace{\square}_{\substack{\text{○が1個}\\ \text{Xが2個}}}$ ○ $\underbrace{\square}_{\substack{\text{○が1個}\\ \text{Xが2個}}}$

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_{10}C_5}=\boxed{\frac{1}{14}}^{コ}$$

Ⅱ

以下 正の整数 ℓ の
　正の約数の個数を L_ℓ，
　正の約数の総和を S_ℓ
とする.

(1) $72=2^3\cdot 3^2$

より、

$$L_{72}=(3+1)(2+1)=12 \cdots (答)$$

$$\begin{aligned}S_{72}&=(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)\\&=\frac{2^4-1}{2-1}\cdot\frac{3^3-1}{3-1}\\&=195 \cdots (答)\end{aligned}$$

(2) $n=p^a q^b$

より

$$L_n=(a+1)(b+1) \cdots (答)$$

$$\begin{aligned}S_n&=(1+p+\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)\\&=\frac{1-p^{a+1}}{1-p}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q} \cdots (答)\end{aligned}$$

(3) $m=p^a q^b r^c$

より

$$L_m=(a+1)(b+1)(c+1)$$

であるから、L_mが奇数となるための必要十分条件は，

　$a+1$，$b+1$，$c+1$ がすべて奇数

すなわち、

　a，b，c がすべて偶数 …(答)

(4) kを正の整数とする.

・$k=1$ のとき

　$L_k=1$ (奇数)

・$k\geqq 2$ のとき

$$k=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots\cdots p_j^{a_j}$$

（j：正の整数
$a_1, a_2, \cdots, a_j$：正の整数
$p_1, p_2, \cdots, p_j$：すべて異なる素数）

と表せ，

$$L_k=(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_j+1)$$

(3)と同様に考えて L_k が奇数となるための必要十分条件は

　$a_1, a_2, \cdots, a_j$ はすべて偶数

以上より、正の約数の個数が奇数となる正の整数は，

　平方数 …(答)

(5) (4)より、求める和は

$$1\leqq N^2\leqq 2020 \cdots (*)$$

を満たす正の整数Nの平方の和である.

$$44^2=1936,\ 45^2=2025$$

であるから、(*)を満たす正の整数Nは，

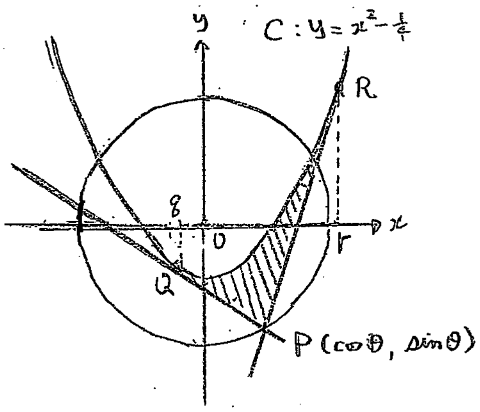
$$N=1, 2, \cdots, 44$$

であり、求める和は

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+44^2&=\frac{44}{6}(44+1)(88+1)\\&=29370 \cdots (答)\end{aligned}$$

Ⅲ

(1)



$f(x)=x^2-\frac{1}{4}$ より　$f'(x)=2x$.

点 $(t, t^2-\frac{1}{4})$ における放物線 C の接線の方程式は

$$y-(t^2-\tfrac{1}{4})=2t(x-t).$$

$$y=2tx-t^2-\tfrac{1}{4}. \quad \cdots ①$$

この接線が点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ を通る条件は

$$\sin\theta=2t\cos\theta-t^2-\tfrac{1}{4},$$

$$t^2-2t\cos\theta+\sin\theta+\tfrac{1}{4}=0. \quad \cdots ②$$

t の2次方程式 ② の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-(\sin\theta+\tfrac{1}{4})$$

$$=-\sin^2\theta-\sin\theta+\tfrac{3}{4}. \quad \cdots ③$$

② が相異なる2実解をもつ条件は $D>0$ より

$$\sin^2\theta+\sin\theta-\tfrac{3}{4}<0$$

$$(\sin\theta-\tfrac{1}{2})(\sin\theta+\tfrac{3}{2})<0$$

$\sin\theta+\frac{3}{2}>0$ より　$\sin\theta<\frac{1}{2}$,

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$ …④…(答)

(2)　q, r は ② の2実解 $(q<r)$ だから, 解の公式により

$$q=\cos\theta-\sqrt{\tfrac{D}{4}}, \quad r=\cos\theta+\sqrt{\tfrac{D}{4}}.$$

$S(\theta)$

$$=\int_q^{\cos\theta}\left\{(x^2-\tfrac{1}{4})-(2qx-q^2-\tfrac{1}{4})\right\}dx$$

$$+\int_{\cos\theta}^{r}\left\{(x^2-\tfrac{1}{4})-(2rx-r^2-\tfrac{1}{4})\right\}dx$$

$$=\int_q^{\cos\theta}(x-q)^2dx+\int_{\cos\theta}^{r}(x-r)^2dx$$

$$=\left[\tfrac{1}{3}(x-q)^3\right]_q^{\cos\theta}+\left[\tfrac{1}{3}(x-r)^3\right]_{\cos\theta}^{r}$$

$$=\tfrac{1}{3}(\cos\theta-q)^3-\tfrac{1}{3}(\cos\theta-r)^3$$

$$=\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{D}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\tfrac{2}{3}\left(-\sin^2\theta-\sin\theta+\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdots$$ (答)
(③より)

(3)　$\frac{D}{4}=-\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{3}{4}$

$$=-(\sin\theta+\tfrac{1}{2})^2+1$$

④ のとき　$-1\leqq\sin\theta<\frac{1}{2}$ だから,

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ すなわち $\theta=\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ のとき最大.

$S(\theta)$ の最大値は $\frac{2}{3}$.
そのとき　$\theta=\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ …(答)