1

(1) X は全部で $\dfrac{4!}{2!}=12$(通り) でき，これらは全て同様に確からしい．X が 4 の倍数となるのは X の下 2 桁が 4 の倍数のときで，それは 1224, 2124, 2412, 4212 の 4 通りあるから，求める確率は $\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$ …(答)

(2) Y は全部で $\dfrac{4!}{2!2!}=6$(通り) でき，これらは全て同様に確からしい．X, Y の大小関係は下表のようになる．

X (確率)	Y (確率)
1△△△ $\left(\dfrac{3}{12}\right)$	全て $X<Y$ を満たす (1)
21△△ $\left(\dfrac{2}{12}\right)$	全て $X<Y$ を満たす (1)
2214 $\left(\dfrac{1}{12}\right)$	全て $X<Y$ を満たす (1)
2241 $\left(\dfrac{1}{12}\right)$	2323, 2332, 3223, 3232, 3322 が $X<Y$ を満たす $\left(\dfrac{5}{6}\right)$
24△△ $\left(\dfrac{2}{12}\right)$	3223, 3232, 3322 が $X<Y$ を満たす $\left(\dfrac{3}{6}\right)$
4△△△ $\left(\dfrac{3}{12}\right)$	$X<Y$ を満たすものは存在しない (0)

よって，求める確率は $\dfrac{3}{12}\cdot 1+\dfrac{2}{12}\cdot 1+\dfrac{1}{12}\cdot 1+\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{12}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{47}{72}$ …(答)

【(2) 別解】

X と Y を作るカードの並べ方は $\dfrac{4!}{2!}\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=72$(通り)

$X<Y$ となるのは $X\geqq Y$ の余事象である．$X=Y$ はありえないので，$X>Y$ となるのは，

(i) $X=4\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{1,\,2,\,2}$　$Y=\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{2,\,2,\,3,\,3}$　$3\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=18$(通り)

(ii) $X=24\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{1,\,2}$　$Y=2\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{2,\,3,\,3}$　$2\cdot 3=6$(通り)

(iii) $X=2241$　$Y=2233$　1 通り

よって，求める確率は $1-\dfrac{18+6+1}{72}=\dfrac{47}{72}$ …(答)

$\boxed{1}$ (つづき) 【別解】

(1) 4枚のカードをすべて区別すると，$\boxed{1}$，$\boxed{2a}$，$\boxed{2b}$，$\boxed{4}$ の並べ方は $4!$ 通りあり，これらは同様に確からしい。

このうち，4桁の数 X が 4の倍数となる並べ方は，下2桁が4の倍数となればよいことに注意して，

$$2412,\quad 4212,\quad 1224,\quad 2124$$

の4通りある。$\boxed{2a}$ $\boxed{2b}$ の入れかえを考えて，$4\times2!$ 通りの並べ方があり，

求める確率は $\dfrac{4\times2!}{4!}=\dfrac{1}{3}$ …(答)

(2) Y の最小値が 2233 であることに注意して，次のように場合分けして考える。

(ア) $X=1224,\ 1242,\ 1422,\ 2124,\ 2142,\ 2214$

のとき，どのような Y に対しても $X<Y$ が成り立つ。

このような X は $6\times2!$ 通りある。

(イ) $X=2241$ のとき，

$Y=2323,\ 2332,\ 3223,\ 3232,\ 3322$

であれば $X<Y$ が成り立つ。

このような X は $2!$ 通り，Y は $5\times2!\times2!$ 通りある。

(ウ) $X=2412,\ 2421$ のとき，

$Y=3223,\ 3232,\ 3322$

であれば $X<Y$ が成り立つ。

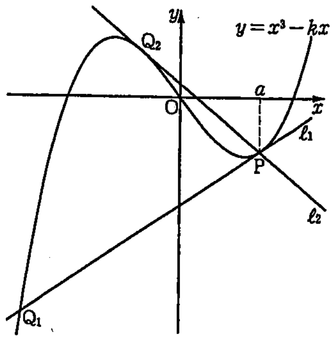
このような X は $2\times2!$ 通り，Y は $3\times2!\times2!$ 通りある。

$X=4122,\ 4212,\ 4221$ のときは，どのような Y に対しても $X<Y$ とならない。(ア)(イ)(ウ)は排反より求める確率は

$$\frac{6\times2!}{4!}+\frac{2!}{4!}\times\frac{5\cdot2!2!}{4!}+\frac{2\cdot2!}{4!}\times\frac{3\cdot2!2!}{4!}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{47}{72}$$ …(答)

2



$f(x)=x^3-kx$　, $f'(x)=3x^2-k$

題意を満たす直線は点Pを通る接線である.

$y=f(x)$ 上の点 (t, t^3-kt) における接線の方程式は,

$$y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)$$

$$y=(3t^2-k)x-2t^3 \quad \cdots ①$$

であり,これが点 $P(a, a^3-ka)$ を通るとき,

$$a^3-ka=(3t^2-k)a-2t^3$$

$$2t^3-3at^2+a^3=0$$

$$(t-a)^2(2t+a)=0$$

$$t=a, -\frac{a}{2}$$

それぞれ①に代入

$$y=(3a^2-k)x-2a^3, \quad y=\left(\frac{3a^2}{4}-k\right)x+\frac{a^3}{4}$$

ここで

$$(3a^2-k)-\left(\frac{3a^2}{4}-k\right)=\frac{9}{4}a^2>0 \quad (a\neq 0)$$

より

$$3a^2-k>\frac{3a^2}{4}-k$$

より（ℓ_1の傾き）>（ℓ_2の傾き）に注意し

$$\ell_1: y=(3a^2-k)x-2a^3 \cdots (答), \quad \ell_2: y=\left(\frac{3a^2}{4}-k\right)x+\frac{a^3}{4} \cdots (答)$$

また

①と $y=f(x)$ の共有点の x 座標を求める.

$$x^3-kx=(3t^2-k)x-2t^3$$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0$$

$$(x-t)^2(x+2t)=0$$

$$x=t, -2t$$

$t=a$ のとき $x=a, -2a$ となり $Q_1(-2a, -8a^3+2ka)$ …(答)

$t=-\frac{a}{2}$ のとき $x=-\frac{a}{2}, a$ となり $Q_2\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^3}{8}+\frac{ka}{2}\right)$ …(答)

$\boxed{2}$（つづき）［別解］

$P(a,\ f(a))$ を通る直線を

$$l:\ y-f(a)=m(x-a)\quad (m\neq 0)$$ すなわち

$$y=mx-ma+a^3-ka$$

とする．l と $C:\ y=f(x)$ を連立して

$$x^3-kx=mx-ma+a^3-ka$$

$$x^3-a^3-k(x-a)-m(x-a)=0$$

$$(x-a)(x^2+ax+a^2-k-m)=0 \quad \cdots①$$

よって，　$x=a,\quad x^2+ax+a^2-k-m=0 \quad \cdots②$

l と C がちょうど 2 点を共有することから，① は異なる 2 個の実数解をもつ．② の係数が実数であることに注意して，① が異なる 2 個の実数解をもつのは，

（ア）② が a と a 以外の実数解をもつ．

（イ）② が a 以外の重解をもつ

場合が考えられる．

（ア）のとき，

$x=a$ が ② の解なので，$3a^2-k-m=0$ から $m=3a^2-k$．

このとき ② は $x^2+ax-2a^2=0$ すなわち $(x-a)(x+2a)=0$

となるので，② の解は $x=a,\ -2a$，（$a\neq0$ よりこれらは異なる）

（イ）のとき，

② の判別式 $D=a^2-4(a^2-k-m)=0$ から $m=\frac{3}{4}a^2-k$．

このとき ② は $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2=0$ すなわち $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=0$

となるので，② の重解は $x=-\frac{a}{2}$　（$a\neq0$ より $a,\ -\frac{a}{2}$ は異なる）

（ア）（イ）のときの m を比較すると，$(3a^2-k)-\left(\frac{3}{4}a^2-k\right)=\frac{9}{4}a^2>0$（$a\neq0$ より）

（ア）のときの m が l_1 を与え，Q_1 の x 座標は $-2a$，

（イ）のときの m が l_2 を与え，Q_2 の x 座標は $-\frac{1}{2}a$．

よって，

$$l_1:\ y=(3a^2-k)x-2a^3,\quad Q_1(-2a,\ -8a^3+2ka)$$

$$l_2:\ y=\left(\frac{3}{4}a^2-k\right)x+\frac{1}{4}a^3,\quad Q_2\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{2}ka\right)$$ …（答）

3

(1)

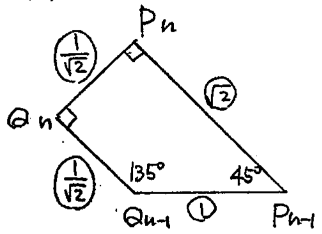


図1

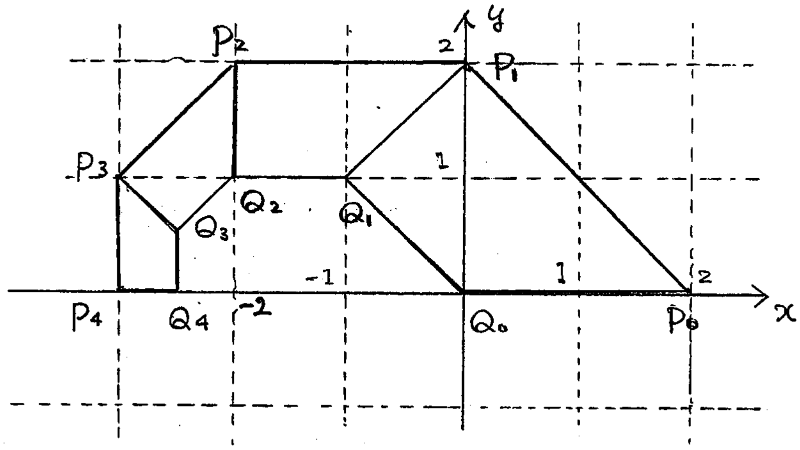


図2

四角形 $P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$ を T_n とする．T_n の辺の長さの比は 図1のようになり，$P_{n-1}Q_{n-1}$: $P_nQ_n = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ から T_n と T_{n+1} の相似比は $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ である．P_2, Q_2 の座標は図2から

$$P_2(-2,\ 2),\quad Q_2(-2,\ 1) \quad \cdots(答)$$

(2)　図2から　$P_4(-3,\ 0)$　$\cdots$(答)

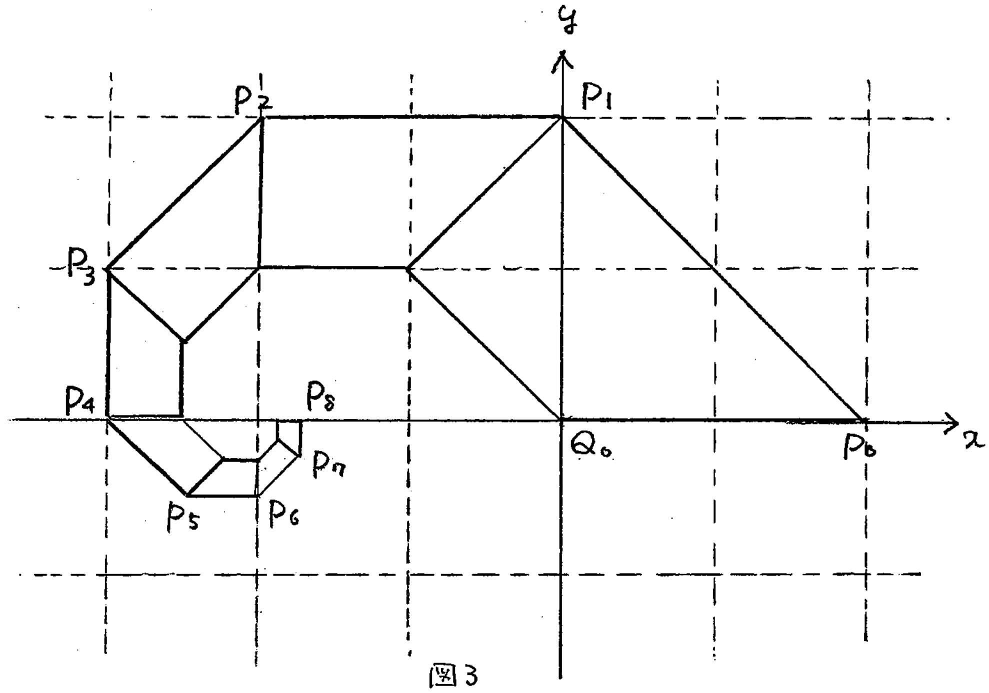


図3

3　（つづき1）

T_1, T_2, T_3, T_4 を合わせた図形と，T_5, T_6, T_7, T_8 を合わせた図形は図3のように相似である。

よって，P_0 から P_4 まで x 座標が 5 減少するとき，

P_4 から P_8 まで x 座標は $5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = 5\cdot\frac{1}{4}$ 増加する。

よって，P_8 の x 座標は

$$2+(-5)+5\cdot\frac{1}{4} = -\frac{7}{4}.$$

P_8 の y 座標は 0 であり，$P_8\left(-\frac{7}{4},\ 0\right)$　…（答）

(3)　(2) と同様に考えて，

P_8 から P_{12} まで x 座標は $5\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{4}\right)^2$ 減少し，

P_{12} から P_{16} まで x 座標は $5\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{4}\right)^3$ 増加する

⋮

P_{8l} から P_{8l+4} まで x 座標は $5\left(\frac{1}{4}\right)^{2l}$ 減少し

P_{8l+4} から P_{8l+8} まで x 座標は $5\left(\frac{1}{4}\right)^{2l+1}$ 増加する。　$(l=0,1,2,\cdots)$

したがって，P_{8m} の x 座標は，

$$2-5+5\cdot\frac{1}{4}-5\left(\frac{1}{4}\right)^2+5\left(\frac{1}{4}\right)^3-\cdots-5\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-2}+5\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1}$$

$$=2-5\left\{1-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1}\right\}$$

$$=2-5\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{2m}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = 2-4\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^m\right\} = 4\left(\frac{1}{16}\right)^m-2.$$

P_{8m} の y 座標は明らかに 0 であり，

$P_{8m}\left(4\left(\frac{1}{16}\right)^m-2,\ 0\right)$　…（答）

$\boxed{3}$ (つづき 2)

【(3) 別解】

縮小・相似な図形が続き P_0, P_4, P_8 は全て x 軸上に存在することから P_{4k} (k は 0 以上の整数) は常に x 軸上に存在する．また，$P_0P_4=5$, $P_0P_8=\frac{15}{4}$ より $P_{4(k+2)}$ は線分 $P_{4k}P_{4(k+1)}$ を $3:1$ に内分する．そこで P_{4k} の x 座標を x_k とすると，

$$x_{k+2}=\frac{3}{4}x_{k+1}+\frac{1}{4}x_k \quad \left(x_1=-3,\ x_2=-\frac{7}{4}\right) \qquad \cdots\cdots①$$

を得る．①より，

$$x_{k+2}-x_{k+1}=-\frac{1}{4}(x_{k+1}-x_k)$$

これは，数列 $\{x_{k+1}-x_k\}$ が公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であることを表すから，

$$x_{k+1}-x_k=(x_2-x_1)\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} \qquad \cdots\cdots②$$

また，再び①より，

$$x_{k+2}+\frac{1}{4}x_{k+1}=x_{k+1}+\frac{1}{4}x_k$$

これは，数列 $\left\{x_{k+1}+\frac{1}{4}x_k\right\}$ が定数数列であることを表すから，

$$x_{k+1}+\frac{1}{4}x_k=x_2+\frac{1}{4}x_1=-\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots③$$

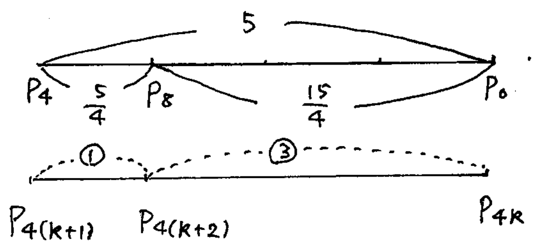
③ − ② から，

$$\frac{5}{4}x_k=-\frac{5}{2}-\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$
$$x_k=-2-\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}=-2+4\left(-\frac{1}{4}\right)^k$$

$k=2m$ とすると，

$$x_{2m}=-2+4\left(-\frac{1}{4}\right)^{2m}=4\left(\frac{1}{16}\right)^m-2$$

以上から P_{8m} $\left(4\left(\frac{1}{16}\right)^m-2,\ 0\right)$ $\cdots$(答)



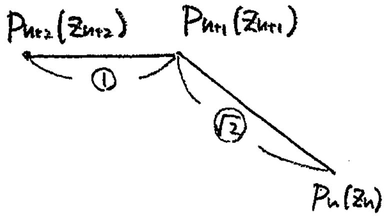
3 (つづき3)

【(3)参考】数学Ⅲの複素数平面を用いると、次のように P_{8m} の座標を求めることができる。

$P_n(z_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とする。$z_0=2$, $z_1=2i$ である。

$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍すると

$\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$ に一致するので



$$z_{n+2}-z_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(z_{n+1}-z_n)$$

$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}(1+i)$ とおくと

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\quad\cdots①$$

よって，$z_{n+1}-z_n=(z_1-z_0)\alpha^n=(2i-2)\alpha^n\quad\cdots②$

①は $z_{n+2}-\alpha z_{n+1}=z_{n+1}-\alpha z_n$ と変形できるので，

$$z_{n+1}-\alpha z_n=(z_1-\alpha z_0)\cdot 1^n=2i-2\alpha=i-1\quad\cdots③$$

② − ③ より

$$(\alpha-1)z_n=2(i-1)\alpha^n-(i-1)$$

$$\frac{1}{2}(i-1)z_n=(i-1)(2\alpha^n-1)$$

$$z_n=2(2\alpha^n-1)$$

$\alpha^{8m}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8m}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot 8m+i\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot 8m\right)=\left(\dfrac{1}{16}\right)^m$ であるから

$$z_{8m}=2\left\{2\left(\frac{1}{16}\right)^m-1\right\}=4\left(\frac{1}{16}\right)^m-2$$

したがって，$P_{8m}\left(4\left(\dfrac{1}{16}\right)^m-2,\ 0\right)$

$\boxed{4}$

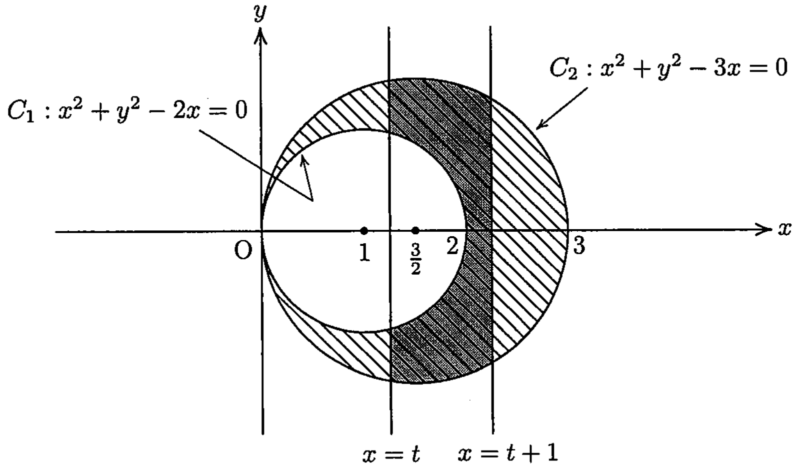
$$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2) \leqq 0 \qquad \cdots ①$$

が表す領域を D とする．① より，

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2 \geqq 0, \\ x^2-3x+y^2 \leqq 0. \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2-2x+y^2 \leqq 0, \\ x^2-3x+y^2 \geqq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2 \geqq 1, \\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2 \leqq \dfrac{9}{4}. \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leqq 1, \\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2 \geqq \dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

よって，D を図示すると，次図の斜線部分 (境界含む) となる．



C_1 における変数 y を y_1, C_2 における変数 y を y_2 と便宜上区別する．$1 \leqq t \leqq 2$ のとき，D と 2 直線 $x=t$, $x=t+1$ の位置関係は上図のようになるので，$t \leqq x \leqq t+1$ における D の部分 (上図の灰色の部分であり，x 軸について対称) の x 軸回転体の体積 $V(t)$ は，

$$V(t) = \int_t^{t+1} \pi {y_2}^2\,dx - \int_t^2 \pi {y_1}^2\,dx.$$

これより，

$$\begin{aligned} \frac{V(t)}{\pi} &= \int_t^{t+1} (3x-x^2)\,dx - \int_t^2 (2x-x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_t^{t+1} - \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_t^2 \\ &= \left\{\frac{3}{2}(t+1)^2 - \frac{1}{3}(t+1)^3\right\} - \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right) - \left\{\left(4-\frac{8}{3}\right) - \left(t^2 - \frac{1}{3}t^3\right)\right\} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (つづき)

$$= -\frac{1}{3}t^3 + 2t - \frac{1}{6}.$$

よって，

$$V(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 2t - \frac{1}{6}\right)\pi.$$

$1 \leqq t \leqq 2$ における $V(t)$ の増減を調べる．

$$V'(t) = (-t^2 + 2)\pi = -(t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2})\pi.$$

t	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，$1 \leqq t \leqq 2$ における $V(t)$ の最大値は，

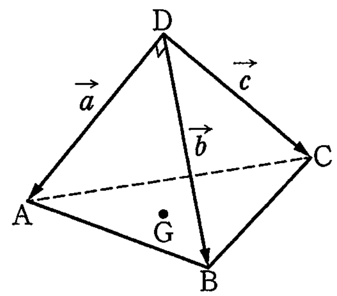
$$V(\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2} - 1}{6}\pi. \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{5}$

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ $\left(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0}\right)$ とする．

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=AC^2+BD^2$ より，

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2$$



展開整理すると，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a} \qquad \cdots\cdots①$$

を得る．また $DA\perp DB$ より，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \cdots\cdots②$$

であるから，①，② より，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \qquad \cdots\cdots③$$

(1) ③ と $\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ より $\vec{b}\perp\vec{c}$ となるから $\angle BDC=90°$ 　…(答)

(2) $\overrightarrow{DG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから③に注意すると，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{DG}\right|^2&=\frac{1}{9}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2\\&=\frac{1}{9}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{9}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2\right)\end{aligned}$$

であるから，

$$\left|\overrightarrow{DG}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2} \qquad \cdots\cdots④$$

また，再び③より，

$$\begin{aligned}\sqrt{AB^2+CD^2}&=\sqrt{\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2}\\&=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}\\&=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2} \qquad \cdots\cdots⑤\end{aligned}$$

となるから④，⑤から，

$$\frac{\sqrt{AB^2+CD^2}}{DG}=\frac{\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2}}{\frac{1}{3}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2}}=3 \qquad \cdots(答)$$

5 (つづき)

【別解】

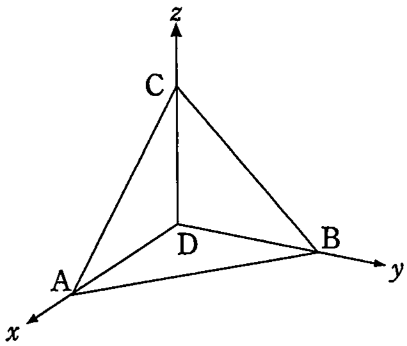
与えられた条件より，
$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2 \quad \cdots ①$$
$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2 \quad \cdots ②$$

（1）$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ であるから，$\triangle\mathrm{ABD}$ において三平方の定理より，
$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2 \quad \cdots ③$$
が成り立つ．

①に③を代入して，
$$\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2$$
$$\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2$$
よって，$\triangle\mathrm{BCD}$ において，三平方の定理が成り立つので，
$$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ \quad \cdots（答）$$

（2）②に③を代入して，
$$\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$$
$$\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2$$
よって，$\triangle\mathrm{ACD}$ において，三平方の定理が成り立つので，
$$\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$$
が成り立つ．

これより，Dを原点として，直線DAを x 軸，直線DBを y 軸，直線DCを z 軸と考えて，
$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 0)$ とおくことができる．



Gは，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるから，
$$\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right).$$

よって，
$$\mathrm{DG}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad \cdots ④$$

一方，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=(a^2+b^2)+c^2$　より，
$$\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤より，
$$\frac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3 \quad \cdots（答）$$

6

3で割った余りに着目して，次のように集合を定める．

$A=\{1,4\}$，　$B=\{2,5\}$，　$C=\{3\}$

それぞれの集合からカードを選ぶ確率は，順に $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ である．

(1) 2回目に初めて S_2 が3の倍数となるのは，

$A - B$　，　$B - A$

の順に取り出すときなので，

$$p_2=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25} \quad \cdots(答)$$

3回目に初めて S_3 が3の倍数となるのは

A ＜ $A - A$，$C - B$　　B ＜ $B - B$，$C - A$

の順に取り出すときなので

$$p_3=\left(\frac{2}{5}\right)^3+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{24}{125} \quad \cdots(答)$$

(2) $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n$ のいずれも3の倍数でない事象を D_n とし，その確率を r_n とおく．

D_{n+1} が起こるのは D_n が起こり，かつ

S_n を3で割った余りが1であれば　AまたはCから

S_n を3で割った余りが2であれば　BまたはCから

カードを選ぶときなので，

$$r_{n+1}=r_n\times\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)\quad つまり\quad r_{n+1}=\frac{3}{5}r_n$$

$r_1=\frac{4}{5}$ に注意して，

$$r_n=\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & & (n-1)\ \ (n) \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \cdots & \frac{3}{5}\ \ \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

(② 〜 (n) の $\frac{3}{5}$ は $n-1$個)

$\boxed{6}$ （つづき）

n 回目に初めて S_n が 3 の倍数となるのは，$n \geqq 2$ のとき，

D_{n-1} が起こり，かつ

S_{n-1} を 3 で割った余りが 1 であれば B から

S_{n-1} を 3 で割った余りが 2 であれば A から

カードを選ぶときなので，

$$p_n = r_{n-1} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}\frac{2}{5} = \frac{8 \cdot 3^{n-2}}{5^n} \quad \cdots (答)$$

(3)　S_1, S_2, S_3 が 3 の倍数でなく $a_3 = 6$ である事象を E，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる事象を F とすると，求める条件付き確率は

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

ここで，確率 $P(E)$ で S_3 を 3 で割った余りは 1 または 2 である。

$S_3, S_4, S_5, \cdots, S_{n-1}$ $(n \geqq 4)$ がいずれも 3 の倍数でない確率は，

(2) の $r_n = r_1\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ の r_1 を $P(E)$ に n を $n-3$ に置き換えて，

$$P(E)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} ① & ② & ③ & ④ \quad ⑤ \quad ⑥ \; \cdots\cdots \; (n-1) \\ & & P(E) & \underbrace{\frac{3}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \cdots \quad \frac{3}{5}}_{n-4\text{個}} \end{array}\right)$$

S_{n-1} を 3 で割った余りが 1 であれば B から

S_{n-1} を 3 で割った余りが 2 であれば A から

カードを選べばよく，

$$P(E \cap F) = P(E)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4} \times \frac{2}{5}$$

したがって

$$q_n = P_E(F) = \frac{P(E)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}\frac{2}{5}}{P(E)} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-4} \cdot \frac{2}{5} \quad \cdots (答)$$

7

$C_1 : y = x^2,\quad C_2 : x = \dfrac{1}{2a}y^2 + \dfrac{3a}{4}$　とする。

$(x^2)' = 2x$ から，$(t,\ t^2)$ における C_1 の接線は

$$y = 2t(x-t) + t^2$$

このうち $t=0$ のときの接線 $y=0$ が C_2 にも接することはないので

$t \neq 0$ として

$$x = \frac{1}{2t}y + \frac{t}{2}$$

これが C_2 にも接する条件は

$$\frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4} = \frac{1}{2t}y + \frac{t}{2}$$

すなわち　$\dfrac{1}{2a}y^2 - \dfrac{1}{2t}y + \left(\dfrac{3a}{4} - \dfrac{t}{2}\right) = 0$　が重解をもつことで

$$(\text{判別式})\ D = \left(-\frac{1}{2t}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{3a}{4} - \frac{t}{2}\right) = 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{a} = -\frac{1}{4t^3} + \frac{3}{2t} \qquad \cdots ①$$

$\dfrac{1}{t} = u$ とおくと　$\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{4}u^3 + \dfrac{3}{2}u$　（ただし $u \neq 0$）

よって　$v = f(u) = -\dfrac{1}{4}u^3 + \dfrac{3}{2}u$　$(u \neq 0)$　と直線 $v = \dfrac{1}{a}$　$(a \neq 0)$ が

異なる3点を共有する a を求めればよく，

$$f'(u) = -\frac{3}{4}(u+\sqrt{2})(u-\sqrt{2})$$

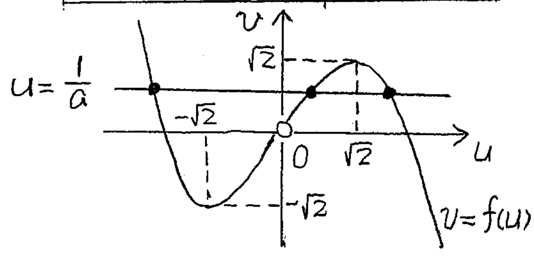
より $f(u)$ の増減は右の通り。

u	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$
f	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\times$	↗	$\sqrt{2}$	↘

したがって求める a の範囲は

$$-\sqrt{2} < \frac{1}{a} < \sqrt{2}$$

から　$a < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　または　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a$　$\cdots$（答）



$\boxed{7}$ （つづき）

（補足）

①式は $4t^3-6at^2+a=0$

と式変形できるので，この t の3次方程式が

異なる3つの実数解を持つための条件を考えてもよい。

$$f(t)=4t^3-6at^2+a \text{ とおくと，}$$

$$\begin{aligned} f'(t)&=12t^2-12at \\ &=12t(t-a) \end{aligned}$$

$a\fallingdotseq 0$ より $f'(t)=0$ とおくと $t=0,\ a$ が得られる。

求める条件は　(極大値)・(極小値) <0

すなわち　$f(0)f(a)<0$ である。

これを解くと $a(-2a^3+a)<0$ より

$$a^2(-2a^2+1)<0$$

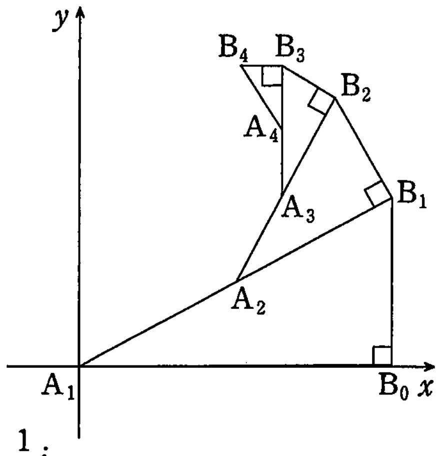
$a\fallingdotseq 0$ より

$$-2a^2+1<0$$

$$a^2-\frac{1}{2}>0$$

$$\therefore\quad a<-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}<a \quad \cdots \text{（答）}$$

8



(1)　$A_1(0)\,(z_1=0)$，　$B_1(\sqrt{3}+i)$ であり

A_2 は線分 A_1B_1 の中点なので，$z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

$\overrightarrow{A_2A_3}$ は $\overrightarrow{A_1A_2}$ を $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍して

$\dfrac{\pi}{6}$ 回転したものなので，

$$z_3-z_2=(z_2-z_1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}i.$$

$$z_3=z_2+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}i=\frac{2\sqrt{3}}{3}+i.$$

…（答）

(2)　$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$ とおく．$z_2=\sqrt{3}\alpha$.

(1) と同様，$\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$ は $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ を $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍して $\dfrac{\pi}{6}$ 回転したものなので，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n).$$

$$z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=\sqrt{3}\alpha^n.$$

$n\geqq 2$ のとき，$\alpha\neq 1$ より，

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{3}\alpha^k=0+\frac{\sqrt{3}\alpha(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha}=\frac{\sqrt{3}(\alpha-\alpha^n)}{1-\alpha}.$$

よって，$z_6=\dfrac{\sqrt{3}(\alpha-\alpha^6)}{1-\alpha}$ となる.

ここで，$\alpha^6=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^6\left(\cos 6\cdot\dfrac{\pi}{6}+i\sin 6\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{27}$ であるから，

$$z_6=\frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i+\frac{1}{27}\right)}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}i}=\frac{5\sqrt{3}}{9}+\frac{14}{9}i.$$

…（答）

$\boxed{8}$ （つづき）

(3) $z_{6m}=\dfrac{\sqrt{3}(\alpha-\alpha^{6m})}{1-\alpha}$.

ここで，$\alpha^{6m}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{6m}(\cos m\pi+i\sin m\pi)=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{m}(-1)^{m}=\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{m}$であるから，

$$z_{6m}=\frac{\sqrt{3}\left\{\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{m}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i\right\}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^{m}+\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{27}\right)^{m}\right\}i.$$

z_{6m}の実部は$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{m}$，虚部は$\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{m}\right\}$.　　…（答）

（注）$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)$は次のように解くこともできる．

$z_{n+2}-(1+\alpha)z_{n+1}+\alpha z_n=0$.

$$\begin{cases} z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n), \\ z_{n+2}-\alpha z_{n+1}=z_{n+1}-\alpha z_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=\sqrt{3}\alpha^n, & \cdots ① \\ z_{n+1}-\alpha z_n=z_2-\alpha z_1=\sqrt{3}\alpha. & \cdots ② \end{cases}$$

②−①より，$(1-\alpha)z_n=\sqrt{3}(\alpha-\alpha^n)$.

$\alpha\fallingdotseq 1$より，$z_n=\dfrac{\sqrt{3}(\alpha-\alpha^n)}{1-\alpha}$.

9

二項定理より，$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$.

$$ {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n=(1+x)^n. \quad \cdots ① $$

(1)　① の両辺に $x=1$ を代入すると，

$$ {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n. $$

$$ a_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n. \qquad \cdots (答) $$

(2)　① の両辺を x で微分すると，

$$ {}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2x+3{}_n\mathrm{C}_3x^2+\cdots+n{}_n\mathrm{C}_nx^{n-1}=n(1+x)^{n-1}. \quad \cdots ② $$

両辺に $x=1$ を代入すると，

$$ {}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n=n2^{n-1}. $$

$$ b_n=\sum_{k=0}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k=n2^{n-1}. \quad \cdots ③ \qquad \cdots (答) $$

(3)　① より，$\displaystyle\int_0^1({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n)dx=\int_0^1(1+x)^ndx$.

$$ \left[{}_n\mathrm{C}_0x+\frac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_1x^2+\frac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_2x^3+\cdots+\frac{1}{n+1}{}_n\mathrm{C}_nx^{n+1}\right]_0^1=\left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_0^1. $$

$$ {}_n\mathrm{C}_0+\frac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_1+\frac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+\frac{1}{n+1}{}_n\mathrm{C}_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}. $$

$$ c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \qquad \cdots (答) $$

(4)　$n\geqq 2$ のとき ② の両辺を x で微分すると，

$$ 2{}_n\mathrm{C}_2+2\cdot3{}_n\mathrm{C}_3x+3\cdot4{}_n\mathrm{C}_4x^2+\cdots+(n-1)n{}_n\mathrm{C}_nx^{n-2}=(n-1)n(1+x)^{n-2}. $$

両辺に $x=1$ を代入すると，

$$ 2{}_n\mathrm{C}_2+2\cdot3{}_n\mathrm{C}_3+3\cdot4{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+(n-1)n{}_n\mathrm{C}_n=(n-1)n2^{n-2} $$

$$ \sum_{k=0}^{n}(k-1)k{}_n\mathrm{C}_k=(n-1)n2^{n-2} \quad \cdots ④ $$

④ は $n=1$ のときも成立する.

③+④ より

$$ d_n=\sum_{k=0}^{n}k^2{}_n\mathrm{C}_k=\{2n+(n-1)n\}2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}. \qquad \cdots (答) $$

$\boxed{9}$ （つづき１）

(5)
$$\frac{a_nb_n}{c_nd_n}=\frac{n2^{2n-1}}{(2^{n+1}-1)\cdot n2^{n-2}}=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{c_nd_n}=1\,. \qquad \cdots\text{（答）}$$

$\boxed{9}$ （つづき２）

【別解】

(2) $k \geqq 1$ のとき $k \cdot {}_nC_k = k \cdot \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} \times n = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

が成り立つので

$$b_n = {}_nC_0 \cdot 0 + n \cdot \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1} = n \cdot (1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1} \quad \cdots \text{（答）}$$

(3) $\dfrac{1}{k+1} \cdot {}_nC_k = \dfrac{1}{k+1} \cdot \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\{(n+1)-(k+1)\}!} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot {}_{n+1}C_{k+1}$$

が成り立つので

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}C_{k+1} = \frac{1}{n+1}\{(1+1)^{n+1} - {}_{n+1}C_0\}$$

$$= \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1) \quad \cdots \text{（答）}$$

(4) $2 \leqq k \leqq n$ のとき $k(k-1) \cdot {}_nC_k = k(k-1) \cdot \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{(n-2)!}{(k-2)!\{(n-2)-(k-2)\}!} \times n(n-1)$$

$$= n(n-1) \cdot {}_{n-2}C_{k-2}$$

$$\therefore \ k^2 \cdot {}_nC_k = k \cdot {}_nC_k + n(n-1) \cdot {}_{n-2}C_{k-2}$$

が成り立つので，$n \geqq 2$ のとき

$$d_n = {}_nC_0 \cdot 0^2 + {}_nC_1 \cdot 1^2 + \sum_{k=2}^{n} k \cdot {}_nC_k + n(n-1) \sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}C_{k-2}$$

$$= n + (b_n - {}_nC_1) + n(n-1) \cdot (1+1)^{n-2}$$

$$= n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} \quad \cdots \text{（答）}$$

これは $n=1$ のとき $d_1 = 1$ を満たしている。

10

有理数 a, b に対して,
「$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば,
a, b は整数である」 … (*)
ことを示す

(i) $a=0$ のとき
有理数 b に対して
$(0+bi)^2 = -b^2$ が整数ならば b は整数である.
(*) は成り立つ.

(ii) $b=0$ のとき
有理数 a に対して
$(a+0\cdot i)^2 = a^2$ が整数ならば a は整数である.
(*) は成り立つ

(iii) $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき
どのような有理数 a, b も
$a=\dfrac{l}{k}, \ b=\dfrac{n}{m}$

$\left(\begin{array}{l} k, l, m, n \text{ は整数} \\ k>0, \ m>0 \\ l \neq 0, \ n \neq 0 \\ k \text{ と } l \text{ は互いに素} \ \cdots ① \\ m \text{ と } n \text{ は互いに素} \ \cdots ② \end{array}\right)$

と表せる.

$\boxed{10}$（つづき1）

$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数のとき

$$\begin{cases} \dfrac{l^2}{k^2}-\dfrac{n^2}{m^2}=A & \cdots ③ \\ 2\dfrac{ln}{km}=B & \cdots ④ \end{cases} \quad (A, B\text{は整数})$$

と表せる.

③を変形して　$(lm)^2=k^2(n^2+Am^2)$
$(lm)^2$ は k^2 の倍数. これより lm は k の倍数
$l\neq 0$ と①より, m は k の倍数 … ⑤

③を変形して　$(kn)^2=m^2(l^2-Ak^2)$
$(kn)^2$ は m^2 の倍数. これより kn は m の倍数
$n\neq 0$ と②より　k は m の倍数 … ⑥

⑤, ⑥より $k=m$ … ⑦　（②より k と n は互いに素 … ②'）
⑦を④に代入して,　$\dfrac{2ln}{k^2}=B$
①②'より　これを満たすのは $k=1$ のみ
⑦とあわせて　$k=m=1$
以上より　(＊)は成り立つ

(i)～(iii)より　(＊)は示された.　（証明終り）

$\boxed{10}$ (つづき2)

【別解】

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ の実部は a^2-b^2, 虚部は $2ab$ である.

示すべき命題の対偶である

『a, b の少なくとも一方が整数でない有理数ならば，a^2-b^2, $2ab$ の少なくとも一方は整数でない有理数である.』　$\cdots(*)$

を証明する.

(I) a, b の一方が整数で，他方が整数でない有理数のとき

少なくとも a^2-b^2 は整数でない有理数となるから，$(*)$ は成り立つ.

(II) a, b ともに整数でない有理数のとき

p, q, r, s を整数として，

$$\begin{cases} a=\dfrac{q}{p} & (p,\ q\ \text{は互いに素 かつ}\ p\geqq 2), \\ b=\dfrac{s}{r} & (r,\ s\ \text{は互いに素 かつ}\ r\geqq 2) \end{cases}$$

とおける.

(i) p と r がともに偶数のとき

少なくとも $2ab$ は整数でない有理数となるから，$(*)$ は成り立つ.

(ii) p と r がともに奇数のとき

仮に $2ab=\dfrac{2qs}{pr}$ が整数になるとすると，s が p で割り切れ，かつ q が r で割り切れなくてはならない．よって，このとき，

$$a=\frac{rm}{p},\quad b=\frac{pn}{r}$$

と表せる．ただし，

$$(m,\ n\ \text{は整数})\ \text{かつ}\ (p\ \text{と}\ rm\ \text{は互いに素})\ \text{かつ}\ (r\ \text{と}\ pn\ \text{は互いに素}) \qquad \cdots①$$

である．このとき，

$$a^2-b^2=\frac{r^2m^2}{p^2}-\frac{p^2n^2}{r^2}=\frac{r^4m^2-p^4n^2}{p^2r^2}$$

となるが，① より，$r^4m^2-p^4n^2$ は p でも r でも割り切れない．つまり，a^2-b^2 は整数でない有理数となる．よって，$(*)$ は成り立つ.

(iii) p が偶数 (奇数)，r が奇数 (偶数) のとき

$$q\ \text{は奇数}\ (s\ \text{は奇数})$$

となることに注意する.

$\boxed{10}$ (つづき 3)

$$a^2 - b^2 = \frac{q^2}{p^2} - \frac{s^2}{r^2} = \frac{q^2r^2 - s^2p^2}{p^2r^2}$$

において，最右辺の分子は奇数，分母は偶数であるから，$a^2 - b^2$ は整数でない有理数となる．よって，(*) は成り立つ．

以上，(I), (II) より，(*) が証明されたので題意は示された．　(証明終り)

11

(1) $f_1(x)=0$, $f_{n+1}(x)=\int_0^x (f_n(t)-1)^2 dt$ …①

のとき $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ …(*)

であることを数学的帰納法により示す。

[1] $f_1(x)=0$ なので，$n=1$ のとき(*)は成り立つ。

[2]「$0 \leqq f_k(x) \leqq 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$」と仮定する。

①から $f'_{k+1}(x)=(f_k(x)-1)^2 \geqq 0$

なので，$f_{k+1}(x)$ は単調増加。よって $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$f_{k+1}(0) \leqq f_{k+1}(x) \leqq f_{k+1}(1)$$

すなわち $0 \leqq f_{k+1}(x) \leqq \int_0^1 (f_k(t)-1)^2 dt$ …②

ここで仮定より $0 \leqq t \leqq 1$ では $(f_k(t)-1)^2 \leqq 1$ なので

この区間で両辺を積分すれば

$$\int_0^1 (f(t)-1)^2 dt \leqq \int_0^1 1 \cdot dt = 1 \quad \cdots ③$$

②かつ③より $0 \leqq f_{k+1}(x) \leqq 1$

となって，$n=k+1$ のときも(*)は成り立つ。

[1]かつ[2]より すべての自然数 n に対して(*)は成り立つ。

（証明終り）

(2) $g_n(x)=(-1)^n \cdot \left(f_n(x)-\frac{x}{x+1}\right)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおくとき

$g_n(x) \geqq 0$ …(☆)

であることを数学的帰納法により示す。

[1] $g_1(x)=\frac{x}{x+1}$ なので，$0 \leqq x \leqq 1$ では $g_1(x) \geqq 0$

よって $n=1$ のとき(☆)は成り立つ。

$\boxed{11}$ （つづき1）

[2]「$g_k(x)\geqq 0$」と仮定する。

$$g'_{k+1}(x)=(-1)^{k+1}\cdot\left\{f'_{k+1}(x)-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$$
$$=(-1)^{k+1}\cdot\left\{(f_k(x)-1)^2-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$$
$$=(-1)^{k+1}\cdot\left(f_k(x)-1+\frac{1}{x+1}\right)\left(f_k(x)-1-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=(-1)^{k}\cdot\left(f_k(x)-\frac{x}{x+1}\right)\cdot\left\{\frac{1}{x+1}+(1-f_k(x))\right\}$$
$$=g_k(x)\cdot\left\{\frac{1}{x+1}+(1-f_k(x))\right\}$$

(1)の結果と仮定により　$g'_{k+1}(x)\geqq 0$

よって　$0\leqq x\leqq 1$ では　$g_{k+1}(x)\geqq g_{k+1}(0)=0$　となり

$n=k+1$ のときも（☆）は成り立つ。

[1]かつ[2]より すべての自然数 n に対して（☆）は成り立ち，

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ とすると　$(-1)^n f_n(x)\geqq(-1)^n f(x)$　（証明終り）

(3)
$$g_{n+1}(x)=\int_0^x g_n(t)\cdot\left\{\frac{1}{t+1}+(1-f_n(t))\right\}dt \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

であり，$\dfrac{1}{t+1}+1-f_n(t)\leqq 2$ なので

$$g_{n+1}(x)\leqq 2\int_0^x g_n(t)\,dt$$

が成り立つ。すると $g_1(t)=\dfrac{t}{t+1}\leqq t$ より

$$g_2(x)\leqq 2\int_0^x t\,dt=x^2,$$
$$g_3(x)\leqq 2\int_0^x t^2\,dt=\frac{2}{3}x^3$$
$$g_4(x)\leqq 2\int_0^x \frac{2}{3}t^3\,dt=\frac{2^2}{3\cdot 4}x^4$$
$$\vdots$$

より　$g_n(x)\leqq\dfrac{2^{n-1}}{n!}x^n$　（厳密には帰納法で）

$\boxed{11}$ (つづき2)

これと(2)より　　$0 \leqq g_n(a) \leqq \dfrac{(2a)^n}{2 \cdot n!}$

がつねに成り立つ。さらに $0 \leqq 2a \leqq 2$ より n が十分大きいとき

$$\frac{(2a)^n}{2 \cdot n!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{1} \cdot \frac{2a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2a}{n}$$

$$\leqq a^2 \left(\frac{2a}{3}\right)^{n-3}$$

なので　　$0 \leqq g_n(a) \leqq a^2 \left(\dfrac{2a}{3}\right)^{n-3}$

ここで　　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a^2 \left(\frac{2a}{3}\right)^{n-3} = 0$

だから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n \to \infty} g_n(a) = 0$$

すなわち　　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a) = \frac{a}{a+1}$　　…(答)