〔 I 〕

(1)

求める自然数 n を素因数分解して $p^a q^b r^c \ldots$ と表すと（$p, q, r \ldots$ は異なる素数, $a, b, c \ldots$ は正の整数）, n の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots$.

$10 = 2\cdot 5$ なので, $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots = 10$ となる n は, p^9 または pq^4 の形に限られる.

$n = p^9$ のとき

最小の n は $n = 2^9 = 512$ なので, この形で2桁の n はない.

$n = pq^4$ のとき

$q = 2$ とすると, $n = p\cdot 2^4 = 16p$.

$p = 3$ のとき, $n = 3\cdot 16 = 48$ 　は2桁なので適する.

$p = 5$ のとき, $n = 5\cdot 16 = 80$ 　は2桁なので適する.

$p \geqq 7$ のとき, $n \geqq 7\cdot 16 = 112$ より, 2桁にはならない.

$q \geqq 3$ とすると, $n = p\cdot 3^4 = 81p$.

$p \geqq 2$ のとき, $n \geqq 81\cdot 2 = 162$ より, 2桁にはならない.

以上より, 正の約数の個数が10個である2桁の自然数は,

48 と 80.　　　　… (答)

〔 I 〕

(2)

$a_1 \neq 0$ なので, 帰納的に, $a_n \neq 0$.　よって, 両辺の逆数をとって,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2n + \frac{3}{a_n}.$$

$\frac{1}{a_n} = A_n$ とすると,

$$A_{n+1} = 2n + 3A_n .$$

これを変形して,

$$A_{n+1} + (n+1) + \frac{1}{2} = 3\left(A_n + n + \frac{1}{2}\right)$$

よって, 数列 $\left\{A_n + n + \frac{1}{2}\right\}$ は, 初項 $\frac{5}{2}$, 公比 3 の等比数列であるから,

$$A_n + n + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\cdot 3^{n-1},$$

$$A_n = \frac{5}{2}\cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2} = \frac{5\cdot 3^{n-1} - 2n - 1}{2}.$$

したがって,

$$a_n = \frac{2}{5\cdot 3^{n-1} - 2n - 1}. \qquad \cdots\text{(答)}$$

〔 I 〕

(3)

tan の倍角の公式より，

$$\frac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\tan\frac{\pi}{12}=x$ と置くと，$\dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$x^2+2\sqrt{3}x-1=0.$$

$$x=-\sqrt{3}\pm 2.$$

$x>0$ なので，$x=-\sqrt{3}+2$.

再び倍角の公式より，

$$\frac{2\tan\frac{\pi}{24}}{1-\tan^2\frac{\pi}{24}}=\tan\frac{\pi}{12}=-\sqrt{3}+2$$

$\tan\frac{\pi}{24}=\frac{1}{y}$ と置くと，$\dfrac{2\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y^2}}=\dfrac{2y}{y^2-1}=-\sqrt{3}+2$

$$(2-\sqrt{3})y^2-2y-2+\sqrt{3}=0,$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1\pm(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2-\sqrt{3}}.$$

$y>0$ なので，$y=\dfrac{1+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2-\sqrt{3}}=(1+\sqrt{6}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

したがって，

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{24}}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}=2. \qquad \cdots(答)$$

〔Ⅰ〕

(4)

放物線のグラフは直線と２点で接することはないので，$y=f(x)$ のグラフが $y=g(x)$ のグラフと異なる２点で接するとすれば、直線 $y=-1$ と直線 $y=x$ とそれぞれ１点で接することが必要。

$y=f(x)$ のグラフが，直線 $y=-1$ で接する条件は，

($x^2+bx+c=-1$ の判別式＝）$b^2-4(c-1)=0$　　…①

また，$y=f(x)$ のグラフが，直線 $y=x$ で接する条件は，

($x^2+bx+c=x$ の判別式＝）$(b-1)^2-4c=0$　　…②

①，②を解くと，

$$b=\frac{5}{2},\quad c=\frac{9}{16}.$$

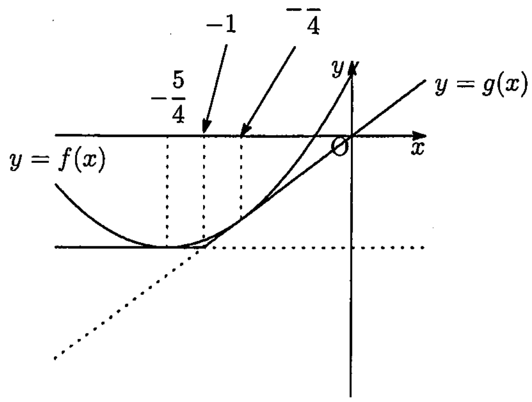
このとき、$y=f(x)$ のグラフは、

直線 $y=-1$ と $x=-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{5}{4}<-1$ で接し、

直線 $y=x$ と $x=-\dfrac{b-1}{2}=-\dfrac{3}{4}>-1$ で接する。

よって、確かに $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは異なる２点で接する。

$$b=\frac{5}{2},\quad c=\frac{9}{16}.\qquad\cdots（答）$$



［II］

(1)　$0 < xyz-1 < xyz$, $0 < (y-1)(z-1) < yz$ より

$$\frac{xyz-1}{yz} < \frac{xyz-1}{(y-1)(z-1)} < \frac{xyz}{(y-1)(z-1)}$$

(左辺)＜(右辺) に対し，$x-1\ (>0)$ で割ると，

$$\frac{xyz-1}{(x-1)yz} < \frac{xyz}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$　（証明終り）

(2)　まず，$1 < x < yz < xyz$ より，

$0 < xyz - yz < xyz - 1$

よって，　$1 < \dfrac{xyz-1}{(x-1)yz}$　……①

次に，$3 \leqq x$，$5 \leqq y$，$7 \leqq z$ より

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} \leqq \left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{y}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{16}{35} \leqq \frac{x-1}{x}\cdot\frac{y-1}{y}\cdot\frac{z-1}{z}$$

逆数をとると，

$$\frac{xyz}{(x-1)(y-1)(z-1)} \leqq \frac{35}{16} < 3 \quad \cdots ②$$

(1)，①，② から

$$1 < \frac{xyz-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} < 3$$　（証明終り）

(3)　条件 (i) より，方程式 $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ の異なる3つの奇数解を α, β, γ $(3 \leqq \alpha < \beta < \gamma)$ とおくと，(2) を用いて，

$$1 < \frac{\alpha\beta\gamma - 1}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)} < 3 \quad \cdots\cdots(*)$$

[II]（つづき 1）

また，$g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と表せるから

$$g(0)=-\alpha\beta\gamma=C \quad \cdots ③$$

$$g(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

$$=1+A+B+C \quad \cdots ④$$

これらを用いると，(*)は，

$$1<\frac{C+1}{A+B+C+1}<3$$

(中央)に条件(ii)を用いると，

$$1<\frac{A+B+2C+2}{A+B+C+1}-1<3$$

$\dfrac{A+B+2C+2}{A+B+C+1}$ は整数より

$$\frac{A+B+2C+2}{A+B+C+1}=3 \quad \cdots ⑤$$

③，④を⑤に代入すると，

$$1+\frac{1-\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}=3$$

$$1-\alpha\beta\gamma=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \quad \cdots ⑥$$

ここで，$3\leqq\alpha$，$5\leqq\beta$，$7\leqq\gamma$ より

$1\leqq l<m<n$ として（l，m，n 自然数）

$\alpha=2l+1$，$\beta=2m+1$，$\gamma=2n+1$ とおけるから

⑥は，

$$1-(2l+1)(2m+1)(2n+1)=2\cdot 2l\cdot 2m\cdot 2n$$

これを整理すると，

$$4lmn-2(lm+mn+nl)-(l+m+n)=0 \quad \cdots (**)$$

［II］（つづき２）

$l=1$ のとき、

(**)、　$4mn-2(mn+m+n)-(m+n+1)=0$

$(2m-3)(2n-3)=11$

$2\leqq m$, $3\leqq n$ より、上式を満たすのは、

$2m-3=1$, $2n-3=11$　つまり $(m, n)=(2, 7)$

このとき、$\alpha=3$, $\beta=5$, $\gamma=15$ を $g(x)$ に代入すると、

$A=-23$, $B=135$, $C=-225$

$l\geqq 2$ のとき、

(**)　$l(4mn-2m-2n-1)=2mn+m+n$

$$l=\frac{2mn+m+n}{4mn-2m-2n-1}\geqq 2$$

$2mn+m+n\geqq 8mn-4m-4n-2$

$6mn-5m-5n\leqq 2$

$$(6m-5)(6n-5)\leqq 2\times 6+25$$
$$=37 \quad \cdots\cdots ①$$

$3\leqq m$, $4\leqq n$ より、①を満たす
(m, n) は存在しない

以上より、

$A=-23$, $B=135$, $C=-225$ ……(答)

[Ⅲ]

3本以上の直線に対する条件

(＊)：「どの2直線も平行でなく，かつどの3直線も1点で交わらない」

を考える．

$n \geqq 3$のとき，n本の直線を$l_1, l_2, \cdots, l_n$として，

$$l_k : y=2kx-k^2 \ (k=1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots (**)$$

とすると，このn本の直線はすべて放物線$y=x^2$の接線であり，どの2本も平行ではない．さらに，ある点から放物線に引ける接線は2本以下なので，このn本の直線のうち3本が1点で交わることはない．

よって，3以上の任意の整数nに対して，(＊)を満たすn本の直線の配置は存在する．

(1)　16個 ((3)参照)　…(答)

(2)　平面上にn本の直線が引かれているときの交点の個数をa_nとする．

$n \geqq 3$のとき，n本の直線から2本を選ぶ選び方は

$$_n\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}n(n-1) \text{(通り)}$$

であるから，

$$a_n \leqq \frac{1}{2}n(n-1) \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．

ここで，(＊)をみたすn本の直線の配置は実現できるので，このとき①の等号は成り立ち，a_nは最大値$\frac{1}{2}n(n-1)$をとる．これは，$n=2$のときも成り立つ．

よって交点の個数の最大値は，

$$\frac{1}{2}n(n-1). \qquad \cdots \text{(答)}$$

(3)　平面上にn本の直線が引かれているときの領域の個数をb_nとする．

$n=1$のとき，$b_1=2$より，b_1の最大値は2

$n=2$のとき，$b_2=2, 3, 4$より，b_2の最大値は4.

$n \geqq 1$のとき．

$(n+1)$本目の直線L_{n+1}を引くと，L_{n+1}が他のn本のすべての直線と平行ではなく，かつ，どの2本の直線の交点も通らないときに，増える領域の個数は最大となる．

ここで，L_{n+1}と他のn本の直線の交点を端から順にP_1，P_2，…，P_nとする．L_{n+1}から線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n$を取り除いた2つの半直線は，n本のときにあった2個の領域をそれぞれ2つずつに分け，さらに$(n-1)$本の線分$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$はn本のときにあった$(n-1)$個の領域をそれぞれ2つずつに分ける．よって，L_{n+1}を引くときに増える領域の個数の最大値は$n+1$であるから，

[Ⅲ]（つづき）

$$b_{n+1} \leqq b_n + n + 1$$

が成り立つ．

$n \geqq 2$のとき，

$$b_n \leqq b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{2}(n^2+n+2). \quad \cdots②$$

であり，これは，$n=1$のときも成り立つ．

$n=1, 2$のときは等号が成立するような直線の配置は実現し，また，$n \geqq 3$ のときも，(＊)をみたす n 本の直線の配置は実現できるので，このとき②の等号は成り立ち，b_n は最大値 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ をとる．

以上より，領域の個数の最大値は　$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$.　…(答)

(注１)　(1)は，$n=5$ とすることで $\frac{1}{2}(5^2+5+2)=16$ が得られる．

(注２)　(＊)を満たす n 本の直線の配置は(＊＊)以外にも存在する．

〔IV〕

(1)　$t=\tan x$ とおく.

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\int \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int \frac{1}{\tan x}(\tan x)'\,dx$$

$$=\int \frac{1}{t}dt=\log|t|+C=\log|\tan x|+C \qquad (C \text{ は積分定数}). \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ の導関数は

$$\left(\frac{\cos x}{\sin^n x}\right)'=\{\cos x(\sin x)^{-n}\}'=-\sin x(\sin x)^{-n}+\cos x\{-n(\sin x)^{-n-1}\cos x\}$$

$$=-\frac{1}{\sin^{n-1}x}-\frac{n\cos^2 x}{\sin^{n+1}x}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)　$\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ の原始関数は

$$\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx=\int(\sin x)^{-n}(\sin x)'\,dx=\frac{(\sin x)^{-n+1}}{-n+1}+C$$

$$=-\frac{1}{(n-1)(\sin x)^{n-1}}+C \qquad (C \text{ は積分定数}). \qquad \cdots①$$

一方,

$$\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x\cos x}\,dx=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x\cos x}\,dx$$

$$=\int \frac{1}{\sin^n x\cos x}\,dx-\int \frac{1}{\sin^{n-2}x\cos x}\,dx. \qquad \cdots②$$

①, ② より,

$$-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x}+C=\int \frac{1}{\sin^n x\cos x}\,dx-\int \frac{1}{\sin^{n-2}x\cos x}\,dx.$$

移項し, C を積分記号の中に繰り込むと,

$$\int \frac{1}{\sin^n x\cos x}\,dx=-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\int \frac{1}{\sin^{n-2}x\cos x}\,dx. \qquad (\text{証明終り})$$

(4)　(1), (3) より,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^3 x\cos x}\,dx=\left[-\frac{1}{2\sin^2 x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}+\left[\log|\tan x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\frac{2}{3}+2+\log\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)-\log\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{4}{3}+\log\sqrt{3}-\log\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4}{3}+\log 3. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) の別解

$$\left(-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x}\right)'=\left\{-\frac{1}{n-1}(\sin x)^{-n+1}\right\}'=-\frac{1}{n-1}(-n+1)(\sin x)^{-n}\cos x=\frac{\cos x}{\sin^n x}$$

より,

$$-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x}=\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx. \qquad \cdots③$$

一方,

$$\int \frac{1}{\sin^n x\cos x}\,dx-\int \frac{1}{\sin^{n-2}x\cos x}\,dx=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x\cos x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x\cos x}\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx \qquad \cdots④$$

となるので, ③ と ④ の左辺は等しく,

$$-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x}=\int \frac{1}{\sin^n x\cos x}\,dx-\int \frac{1}{\sin^{n-2}x\cos x}\,dx.$$

これを移項して与式を得る.　(証明終り)