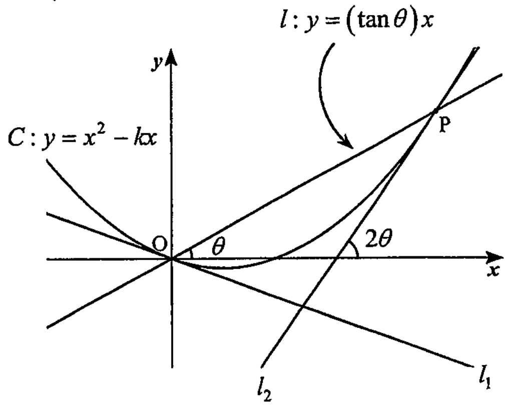
[1]

$f(x)=x^2-kx$ とする．

(1)　$f'(x)=2x-k$ であり，l_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ であるから，



$f'(0)=-\dfrac{1}{3}$ より，

$$-k=-\frac{1}{3}$$

$$k=\frac{1}{3} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より $k=\dfrac{1}{3}$ であるから，

$$f(x)=x^2-\frac{1}{3}x,\quad f'(x)=2x-\frac{1}{3}$$

である．$y=x^2-\dfrac{1}{3}x$ と $y=(\tan\theta)x$ から，

$$x^2-\frac{1}{3}x=(\tan\theta)x$$

$$x\left(x-\tan\theta-\frac{1}{3}\right)=0$$

$$x=0,\ \tan\theta+\frac{1}{3}$$

となり，P は O と異なるから，P の x 座標は，

$$x=\tan\theta+\frac{1}{3}$$

である．l_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるから，$f'\left(\tan\theta+\dfrac{1}{3}\right)=\tan 2\theta$ より，

$$2\left(\tan\theta+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=\tan 2\theta$$

$$2\tan\theta+\frac{1}{3}=\tan 2\theta \qquad \cdots①$$

であり，2 倍角の公式から，

［1］（つづき）

$$2\tan\theta+\frac{1}{3}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

となる，ここで，$t=\tan\theta$ とすると，

$$2t+\frac{1}{3}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$6t\left(1-t^2\right)+\left(1-t^2\right)=6t$$

$$6t^3+t^2-1=0$$

$$(2t-1)\left(3t^2+2t+1\right)=0$$

$$(2t-1)\left\{3\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right\}=0$$

となり，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ より $0<t<1$ であるから，$t=\frac{1}{2}$，つまり，

$$\tan\theta=\frac{1}{2}\qquad\cdots(答)$$

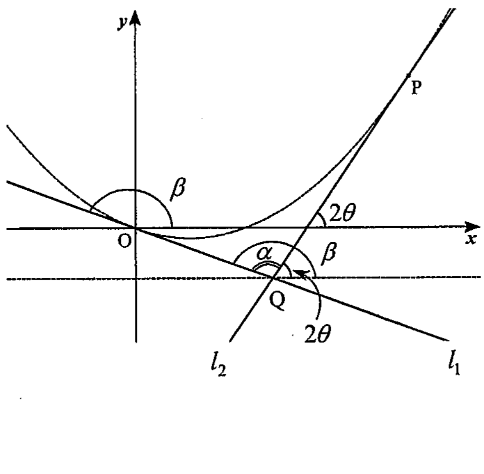
(3)　(2) の結果である $\tan\theta=\frac{1}{2}$ と①より，$\tan 2\theta=\frac{4}{3}$ である．また，l_1 の傾きから $\tan\beta=-\frac{1}{3}$ とすると，β と 2θ は右図のように l_1, l_2 と x 軸の正の向きとなす角である．よって，加法定理を用いると，

$$\tan\alpha=\tan(\beta-2\theta)$$

$$=\frac{\tan\beta-\tan 2\theta}{1+\tan\beta\tan 2\theta}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}}$$

$$=-3\qquad\cdots(答)$$



〔2〕

(1) 条件より，$\dfrac{x}{a} \leqq M$，$\dfrac{y}{b} \leqq M$，$\dfrac{z}{c} \leqq M$ であるので，

$$x \leqq aM,\quad y \leqq bM,\quad z \leqq cM.$$

よって，

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leqq \frac{aM+bM+cM}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c}M = M$$

であるので，

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leqq M.$$

（この等号は，$x=aM$ かつ $y=bM$ かつ $z=cM$ のとき成立．）

（証明終り）

(2)

$$\log_2 5 - \log_3 5 = \log_2 5 - \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

$$= (\log_2 5)\left(1 - \frac{1}{\log_2 3}\right)$$

$$= (\log_2 5)\cdot\frac{\log_2 3 - \log_2 2}{\log_2 3} > 0$$

よって，$\log_2 5 > \log_3 5$．　…（答）

〔2〕（つづき）

(3) (2) より，$\log_2 5 > \log_3 5 > \log_3 3 = 1$ であるので，

$$(\log_2 5)^n > (\log_3 5)^n .$$

よって，$\dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} > \dfrac{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} = 1$ ．

また，
$$\begin{aligned}\log_3 25-\log_2 5 &= \frac{2\log_2 5}{\log_2 3}-\log_2 5\\ &= (\log_2 5)\cdot\left(\frac{2}{\log_2 3}-1\right)\\ &= (\log_2 5)\cdot\frac{\log_2 4-\log_2 3}{\log_2 3} > 0\end{aligned}$$

より，$\log_2 5 < \log_3 25$ であることをふまえると，

$$\frac{1}{1} < 2 \leqq 2^n$$

$$\frac{\log_2 5}{\log_3 5} < \frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2 \leqq 2^n$$

$$\frac{(\log_2 5)^n}{(\log_3 5)^n} = \left(\frac{\log_2 5}{\log_3 5}\right)^n < \left(\frac{\log_3 25}{\log_3 5}\right)^n = (\log_5 25)^n = 2^n$$

よって，$\dfrac{1}{1} < 2^n$，$\dfrac{\log_2 5}{\log_3 5} < 2^n$，$\dfrac{(\log_2 5)^n}{(\log_3 5)^n} < 2^n$ であるので，

(1) を，$x=1$，$y=\log_2 5$，$z=(\log_2 5)^n$，
$a=1$，$b=\log_3 5$，$c=(\log_3 5)^n$，$M=2^n$

として用いると，$\dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < 2^n$ ．

以上より，$1 < \dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < 2^n$． （証明終り）

[3]

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ であり，OD:DA$=s:1-s$, OE:EB$=t:1-t$ であるから，

$$\overrightarrow{OD}=s\vec{a},\quad \overrightarrow{OE}=t\vec{b}$$

である．次に $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OC}$ より，

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}=\vec{b}+\vec{c}$$

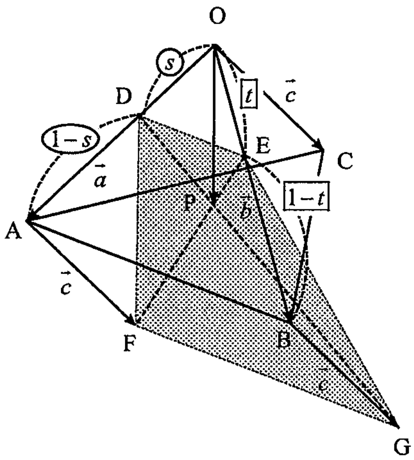
であるから，

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\vec{a}-t\vec{b}+\vec{c},\quad \overrightarrow{DG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OD}=-s\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

と表される．

(1)　P は線分 EF 上にあるから，$0\leqq u\leqq 1$ を満たす u を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{EF}\\&=t\vec{b}+u\left(\vec{a}-t\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=u\vec{a}+t(1-u)\vec{b}+u\vec{c}\quad\cdots①\end{aligned}$$



と表される．次に，P は線分 DG 上にあるから，$0\leqq v\leqq 1$ を満たす v を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OD}+v\overrightarrow{DG}\\&=s\vec{a}+v\left(-s\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=s(1-v)\vec{a}+v\vec{b}+v\vec{c}\quad\cdots②\end{aligned}$$

と表される．$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから，①と②より，

$$\begin{cases}u=s(1-v) & \cdots③\\ t(1-u)=v & \cdots④\\ u=v & \cdots⑤\end{cases}$$

であり，③と⑤から，

$$v=s(1-v)$$

$$v=\frac{s}{1+s}\quad\cdots⑥$$

であり，同様に④と⑤から，

$$u=\frac{t}{1+t}\quad\cdots⑦$$

となる．よって，⑤，⑥，⑦より，

[3]（つづき 1）

$$\frac{s}{1+s}=\frac{t}{1+t}$$

$$s(1+t)=t(1+s)$$

$$t=s$$

である．（$0<s<1$，$0<t<1$ より $0\leqq u\leqq 1$，$0\leqq v\leqq 1$ も満たされる．）

（証明終り）

このとき，②と⑥より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left(1-\frac{s}{1+s}\right)\vec{a}+\frac{s}{1+s}\vec{b}+\frac{s}{1+s}\vec{c}$$

$$=\frac{s}{1+s}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\quad\cdots(\text{答})$$

(2)　$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=l(>0)$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=l^2\cos\theta$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ のとき，

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}=0$ より，

$$\left(\vec{a}-s\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(-s\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=0$$

$$-s\left|\vec{a}\right|^2-s\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+\left(1+s^2\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-s)\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$-sl^2-sl^2+l^2+\left(1+s^2\right)l^2\cos\theta+(1-s)l^2\cos\theta+(1-s)l^2\cos\theta=0$$

$$\left(s^2-2s+3\right)\cos\theta=2s-1$$

$s^2-2s+3=(s-1)^2+2\neq 0$ であるから，

$$\cos\theta=\frac{2s-1}{s^2-2s+3}\quad\cdots(\text{答})$$

(3)　(1) と (2) の結果より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=\left|\frac{s}{1+s}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\right|^2$$

[3]（つづき 2）

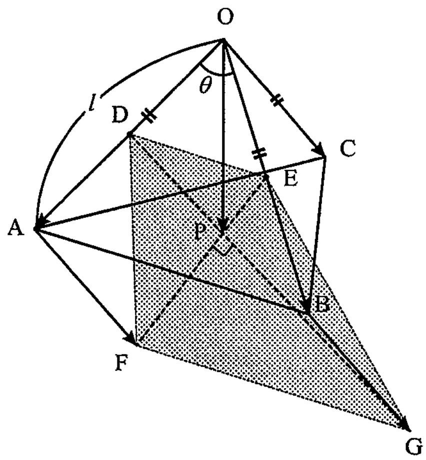
$$=\left(\frac{s}{1+s}\right)^2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$=\left(\frac{s}{1+s}\right)^2\left(3l^2+6l^2\cos\theta\right)$$

$$=3l^2\left(\frac{s}{1+s}\right)^2\left(1+2\cdot\frac{2s-1}{s^2-2s+3}\right)$$

$$=3l^2\left(\frac{s}{1+s}\right)^2\left(\frac{s^2+2s+1}{s^2-2s+3}\right)$$

$$=3l^2\cdot\frac{s^2}{s^2-2s+3}$$



であり，$\sqrt{3}\mathrm{OP}=\mathrm{OA}$ より $3\mathrm{OP}^2=l^2$ であるから，

$$3\cdot 3l^2\cdot\frac{s^2}{s^2-2s+3}=l^2$$

$$8s^2+2s-3=0$$

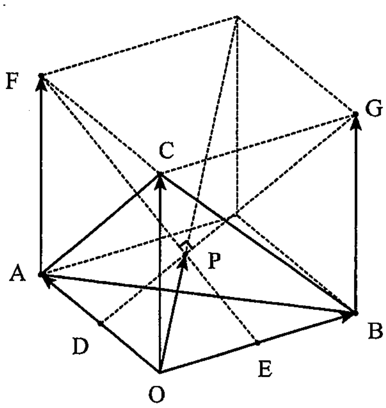
$$(2s-1)(4s+3)=0$$

であり，$0<s<1$ であるから，

$$s=\frac{1}{2}\qquad\cdots(\text{答})$$

【参考図】

(3) の条件が満たされるときは，O，A，B，C が右図のように立方体の頂点となり，D，E が各辺の中点となります．



〔4〕

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ より，

$$-1 \leqq \cos x \leqq 1,\quad 0 \leqq \sin x \leqq 1$$

$$1+\sin x \geqq 0,\quad -1-\cos x \leqq 0$$

$$f(x) \geqq 0,\quad g(x) \leqq 0$$

これより，

$$|f(x)| = |g(x)|$$

$$f(x) = -g(x)$$

$$1+\sin x = -(-1-\cos x)$$

$$\sin x - \cos x = 0$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

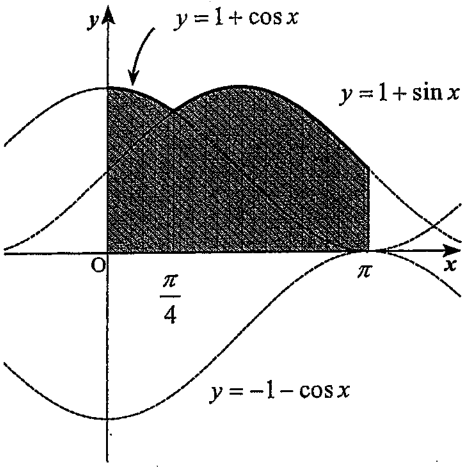
$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x-\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ なので，

$$x-\frac{\pi}{4} = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad \cdots(\text{答})$$

4 (つづき)

(2) (1) より，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=1+\cos x$ の交点の x 座標は $x=\dfrac{\pi}{4}$ である．
図の影の部分を x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積を求めればよい．



求める体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos x)^2dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(1+\sin x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos x+\cos^2 x)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(1+2\sin x+\sin^2 x)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left(1+2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{3}{2}x+2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\pi\left[\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$=\frac{(3\pi+4\sqrt{2}+5)\pi}{2}$$

…(答)

[5]

(1) $f(t)=e^t-t-1$ とする. $f'(t)=e^t-1$. $t>0$ のとき, $e^t-1>0$ であるから, $f(t)$ は単調に増加する.
よって, $f(t)>f(0)=0$ より, $e^t-t-1>0$.
したがって, $e^t-1>t$ より, $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq 1$　　　…① は成り立つ.
次に, $g(t)=te^t-e^t+1$ とする. $g(t)=(t-1)e^t+1$ より, $g'(t)=e^t+(t-1)e^t=te^t$.
$t>0$ のとき, $g'(t)>0$ であるから, $g(t)$ は単調に増加する. よって, $g(t)>g(0)=0$.
よって, $te^t-(e^t-1)>0$ より, $\dfrac{e^t-1}{t}\leqq e^t$　　　…② は成り立つ.
以上①,②より,

$$t>0 \text{ のとき, } 1\leqq\frac{e^t-1}{t}\leqq e^t \text{ は成り立つ.}$$

(証明終り)

(2)

$$\begin{cases} x_n=\log(e^{a_n}+1) \\ y_n=\log(e^{a_n}-1) \\ z_n=y_n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k \end{cases} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\begin{aligned}
z_n&=y_n+\sum_{k=1}^{n}x_k\\
&=\log(e^{a_n}-1)+\log(e^{a_1}+1)+\log(e^{a_2}+1)+\log(e^{a_3}+1)+\cdots+\log(e^{a_n}+1)\\
&=\log(e^{a_n}-1)+\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)(e^{a_3}+1)\cdots(e^{a_n}+1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)(e^{a_3}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_n}+1)(e^{a_n}-1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)(e^{a_3}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_{n-1}}-1) \quad (a_{n-1}=2a_n\text{より})\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)(e^{a_3}+1)\cdots(e^{a_{n-2}}-1)\\
&\quad\cdots\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_1}-1)\\
&=\log(e^{2\cdot a_1}-1)\\
&=\log(e-1). \quad \left(a_1=\frac{1}{2}\text{より}\right)
\end{aligned}$$

よって,

z_nは n によらない定数である.

(証明終り)

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{e^{a_n}+1}{2}\right)$ とする.

$$S_n=\log\left(\frac{e^{a_1}+1}{2}\right)\left(\frac{e^{a_2}+1}{2}\right)\left(\frac{e^{a_3}+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{e^{a_n}+1}{2}\right).$$

上式の両辺に $\log\left(\dfrac{e^{a_n}-1}{2}\right)$ をたして,

[5](つづき 1)

$$S_n + \log\left(\frac{e^{a_n}-1}{2}\right) = \log\left(\frac{e^{a_1}+1}{2}\right)\left(\frac{e^{a_2}+1}{2}\right)\left(\frac{e^{a_3}+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{e^{a_n}+1}{2}\right)\left(\frac{e^{a_n}-1}{2}\right)$$
$$= \log\frac{e-1}{2^{n+1}} \quad ((2)\text{ より})$$
$$= \log\{(e-1)a_{n+1}\}$$

よって,

$$S_n = \log(e-1) + \log a_{n+1} - \log\left(\frac{e^{a_n}-1}{2}\right)$$
$$= \log(e-1) + \log\left(\frac{2a_{n+1}}{e^{a_n}-1}\right)$$
$$= \log(e-1) - \log\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right).$$

ここで,(1) の式に $t = a_n\ (>0)$ を代入して,

$$1 \leqq \frac{e^{a_n}-1}{a_n} \leqq e^{a_n}.$$

上式の最右辺において, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ であるから, $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = 1$.

よって, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1.$$

よって, $\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right) = 0$.

したがって,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \log(e-1). \qquad \cdots(\text{答})$$

〔5〕（つづき2）

（注）

(1) の本解において，$f(t)$，$g(t)$ の定義域は実数全体とした．また，この不等式の等号は成り立たない．

【(1) の別解1】

関数 $y=e^x$ は実数全体で連続かつ微分可能で $y'=e^x$．

$t>0$ であるので，区間 $0 \leqq x \leqq t$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{e^t-1}{t}=e^c \quad \text{かつ} \quad 0<c<t$$

を満たす c が存在する．

e^t は増加関数であるので $0<c<t$ のとき　$1=e^0<e^c<e^t$

$\dfrac{e^t-1}{t}=e^c$ であるから

$$1 \leqq \frac{e^t-1}{t} \leqq e^t$$

(証明終り)

【(1) の別解2】

$t>0$ であるので，$0 \leqq x \leqq t$ の範囲で　$1 \leqq e^x \leqq e^t$

各辺を積分しても大小関係は同じで

$$\int_0^t dx \leqq \int_0^t e^x dx \leqq e^t \int_0^t dx$$

積分を実行すると $t \leqq e^t-1 \leqq te^t$ が導かれ

$$1 \leqq \frac{e^t-1}{t} \leqq e^t$$

(証明終り)

（(2) についてのコメント）

$$z_1=x_1+y_1=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_1}-1)=\log(e^{2a_1}-1)=\log(e-1)$$

であるから，

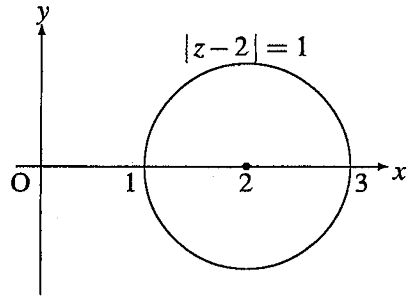
「 $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，

$$z_n=\log(e-1) \qquad \cdots (*)$$ 」

であることを推定し，(*) を数学的帰納法を用いて証明するという解答も考えられる．

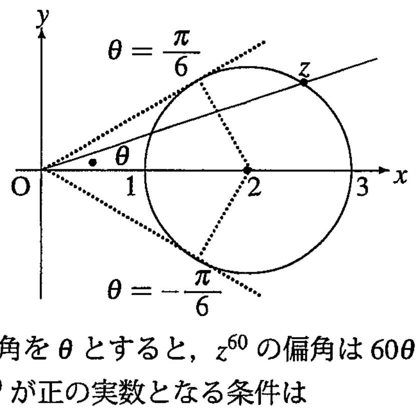
[6]

(1)　$|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ から　$z\overline{z}-2z-2\overline{z}=-3$
両辺に 4 を加えて
$$(z-2)(\overline{z}-2)=1$$
したがって $|z-2|^2=1$ となって
$$|z-2|=1$$
が導かれる．この等式を満たす複素数の集合 A は，点 2 を中心とする半径 1 の円周である．



【(1) の別解】
$z=x+iy$ (x, y は実数) とおくと $|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ から
$$x^2+y^2+3=2(x+iy+x-iy)$$
整理して $x^2+y^2-4x+3=0$ となるので，集合 A の方程式は
$$(x-2)^2+y^2=1$$
(図は同じ)

(2)　原点から集合 A に引いた 2 本の接線と x 軸の正方向とのなす角は $\pm\frac{\pi}{6}$ である．したがって，次の図のように z の偏角 θ の値の範囲は
$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}}$$
…(答)



(3)　A の要素 z の偏角を θ とすると，z^{60} の偏角は 60θ となる．
したがって，z^{60} が正の実数となる条件は
$$60\theta=2n\pi$$

[6] (つづき)

となる整数 n が存在することである．このとき $\theta = \frac{n}{30}\pi$ となるで，

(2) と合わせて

$$\theta = -\frac{5}{30}\pi,\ -\frac{4}{30}\pi,\ -\frac{3}{30}\pi,\ \cdots,\ \frac{4}{30}\pi,\ \frac{5}{30}\pi$$

の 11 個の θ がこの条件を満たす．

さらに，1 つの θ に対して対応する z の個数は次のようになる．

θ	$-\frac{5}{30}\pi$	$-\frac{4}{30}\pi$	$-\frac{3}{30}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{30}\pi$	$\frac{5}{30}\pi$
z の個数	1	2	2	$\cdots$	2	1

対応する z の個数が 1 である θ は 2 個，2 である θ は 9 個あるので，z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数は

$$2 \times 1 + 9 \times 2 = \mathbf{20} \qquad \cdots(答)$$

[6] 参考図